

MNPEF
Mestrado Nacional
Profissional em
Ensino de Física

MNPEF Mestrado Nacional
Profissional em
Ensino de Física
Polo UFSCar Sorocaba



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CAMPUS SOROCABA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS PARA A SUSTENTABILIDADE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

Reforçando a relação entre a matemática e a física no ensino médio através de exemplos básicos de mecânica clássica

Renato Rodrigues Medina

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Ensino de Física (PROFIS-So), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador: Prof. Dr. James Alves de Souza

UFSCar - Sorocaba

Março/2017

**Reforçando a relação entre a matemática e a física no ensino médio
através de exemplos básicos de mecânica clássica**

Renato Rodrigues Medina

Orientador:
Prof. Dr. James Alves de Souza

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Ensino de Física (PROFIS-So) da Universidade Federal de São Carlos, campus de Sorocaba, no Curso de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física (MNPEF), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

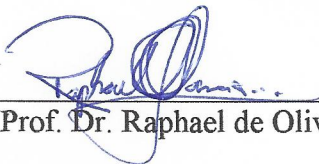
Aprovada por:



Profª. Dra. Adriana de Oliveira Delgado Silva



Profª. Dra. Fernanda Keila Marinho da Silva



Prof. Dr. Raphael de Oliveira Garcia

Sorocaba
Fevereiro de 2017

Rodrigues Medina, Renato

Reforçando a relação entre a matemática e a física no ensino médio através de exemplos básicos de mecânica clássica / Renato Rodrigues Medina. -- 2017.

120 f. : 30 cm.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba

Orientador: James Alves de Souza

Banca examinadora: Adriana de Oliveira Delgado Silva, Fernanda Keila Marinho da Silva, Raphael de Oliveira Garcia

Bibliografia

1. Ensino de Física. 2. Mecânica Clássica. 3. Matematização. I. Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III. Título.

Dedico esta dissertação a todos que, de alguma maneira, contribuíram para meu crescimento como pessoa e como profissional da educação.

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Dr. James Alves de Souza por me orientar durante esses anos, sempre me incentivando com muita paciência para que eu me tornasse um pesquisador de qualidade. Em especial, agradeço aos melhores educadores que alguém poderia ter, meus pais José Moreno Medina e Maria Carmen Rodrigues Medina, que me instruíram em sempre seguir o caminho da bondade e honestidade, sempre baseados em que o estudo é a principal ferramenta para a construção de um cidadão crítico. Agradeço também a minha esposa Mariane Fernanda Coelho Medina que sempre me incentivou a nunca desistir, mesmo nas adversidades que surgiram ao longo desses anos de mestrado. Agradeço a ela pelo companheirismo e amor dedicado, mas principalmente sou grato por poder compartilhar comigo a maior bênção das nossas vidas, minha filha amada Ana Cecília Coelho Medina. Por fim, agradeço a Deus e a todas as entidades superiores que sempre olham e cuidam de mim e de todos meus familiares e amigos queridos.

Resumo

Neste trabalho é apresentado um estudo com algumas estratégias de ensino na tentativa de fortalecer a relação entre a matemática e a física no ensino médio. Através de problemas simples em temas da mecânica clássica como aplicações da segunda lei de Newton e movimentos retilíneo e circular uniformes, é discutida a importância de se quantificar matematicamente fenômenos físicos para a descrição e previsão de situações que podem ser observadas no dia a dia dos alunos. Para isso foi utilizada uma matemática simples e adequada para o ensino médio explorando conceitos como funções, versores, vetores e suas projeções, sistemas de coordenadas e gráficos. A forma com que os exercícios foram tratados pode ser um passo importante para abordar tópicos mais avançados e modernos da física em que a matemática é imprescindível, como a relatividade e a mecânica quântica, ou até mesmo favorecer o entendimento de conceitos mais abstratos como o de campo em eletromagnetismo e a modelagem de sistemas em que a execução de experimentos ou a observação seja inviável, como o movimento de planetas ou o comportamento dos átomos em um gás. Esta proposta foi aplicada em uma escola da rede particular da cidade de Bragança Paulista, estado de São Paulo, em uma turma do 3º ano do ensino médio com aproximadamente 35 alunos. Vários cálculos e explicações desenvolvidos pelos estudantes são apresentados, mostrando que a proposta foi muito bem recebida pelos alunos e bem sucedida. O produto educacional proveniente da aplicação desta proposta consiste de um material paradidático no formato de um pequeno livro contendo todos os detalhes e a importância de se quantificar fenômenos físicos através da modelagem matemática.

Palavras-chave: Ensino de física, mecânica clássica, matematização.

Abstract

In this work a study is presented using some teaching strategies in order to strengthen the relationship between mathematics and physics in high school. It is shown how important it is to describe mathematically a physical phenomenon to motivate students in the description and prediction of situations that can be observed in their daily lives. For this purpose, simple examples are considered in classical mechanics, such as Newton's second law applications and uniform rectilinear and circular motions. The physical phenomena were explored through mathematical concepts which are suitable for high school level such as functions, unit vector, vectors and their projections, coordinate systems and graphs. The approach considered here can be an important step for addressing more advanced and modern topics in physics in which mathematics is imperative, such as relativity and quantum mechanics. It can also favor the understanding of more abstract concepts such as the electromagnetic field, and the modeling of systems in which the performance of experiments or its observation is impracticable, such as the movement of planets or the behavior of atoms in a gas. This proposal was applied to 35 students in the third year of high school in the Bragança Paulista city, state of São Paulo. Several calculations and the explanations developed by the students are presented, showing that the proposal was successful, being very well received by the students. The outcome educational product from this proposal consists of a booklet containing all details and the importance of quantifying physical phenomena through mathematical modeling.

Keywords: Physics teaching, classical mechanics, mathematics.

Lista de Figuras

- 3.1 Magnitude e direção do vetor velocidade \vec{v} de um objeto localizado na posição (x, y, z) de um sistema de coordenadas cartesianas com relação à origem $(0, 0, 0)$. Fonte: Autor. 18
- 3.2 Gráfico da velocidade em função do tempo para uma partícula com aceleração constante a , dada pela inclinação da reta, ou seja, $a = [v(t) - v_0] / t$. Fonte: Autor. 20
- 3.3 Sistema massa-mola descrito pela lei de Hooke $F(x) = -kx$, mostrando que quando a massa m se desloca de sua posição de equilíbrio estável ($x = 0$), a força restauradora $F(x)$ fornecida pela mola de constante elástica k faz com que a mesma retorne a $x = 0$. A contante A ou $-A$ descreve a amplitude do movimento. Fonte: Autor. 22
- 3.4 (a) Partícula em movimento circular uniforme com velocidade \vec{v} , mostrando a trajetória circular s de raio R e ângulo θ . (b) Se curvamos a trajetória retilínea dada pelo eixo x no MRU obtemos a trajetória circular s do MCU. Em ambos os casos temos um grau de liberdade. Fonte: Autor. 24
- 3.5 Partícula em movimento circular uniforme com velocidade \vec{v} , mostrando a projeção do vetor \vec{R} no eixo x , dada por $\vec{x}(t) = R \cos [\theta(t)] (\hat{i})$, para obtenção da equação de movimento do oscilador harmônico. Fonte: Autor. 26

4.1	À esquerda ilustramos uma moeda de raio r_m envolvida por um barbante de forma bem ajustada e à direita mostramos a nova circunferência de raio R_m formada pelo barbante após acrescentarmos 10 cm em seu comprimento. O ponto de interrogação é a folga $R_m - r_m$ que os alunos precisaram discutir se era maior, menor ou igual à folga entre o barbante e o planeta Terra nas mesmas condições. Fonte: Autor.	31
4.2	(a) Sistema de coordenadas cartesianas em que um vetor \vec{a} é descrito em duas dimensões pelas coordenadas x e y . Também foi discutido a possibilidade de uma terceira dimensão dada pelo eixo z . (b) Sistema de coordenadas polares em que \vec{a} é descrito por um raio R e um ângulo θ . Fonte: Autor.	34
4.3	Representação da distância entre dois pontos arbitrários da cidade em que os alunos moram utilizando mapas para obtenção da direção, do sentido e do módulo do deslocamento entre esses dois pontos. Fonte: Autor e alunos.	36
4.4	Representação de duas forças sendo aplicadas em uma caixa em direções diferentes, com $ \vec{F}_1 = 200N$ fazendo um ângulo de 60° com uma linha horizontal que separa as duas forças, enquanto que $ \vec{F}_2 = 120N$ é aplicada numa direção de 45° com a mesma linha. Fonte: Autor.	37
4.5	Representação dos eixos coordenados x e y para o sistema composto por um trenó deslizando numa pista de gelo inclinada por um ângulo θ . Note as decomposições do vetor força peso \vec{P} em suas componentes \vec{P}_x e \vec{P}_y realizadas pelos alunos. Fonte: Autor e alunos.	39
4.6	(a) Veículo com velocidade \vec{v} se movendo em uma superfície com raio de curvatura R e (b) ilustramos o mesmo veículo passando por um declive com mesmo raio de curvatura. São apresentadas a reação normal da superfície \vec{N}_1 e \vec{N}_2 , para (a) e (b), respectivamente, e a força peso $m\vec{g}$. Fonte: Autor.	41

4.7	Foto do Verrückt, um dos maiores toboáguas do mundo inaugurado em 2014 nos Estados Unidos, mostrando os pontos mais altos A e C , e mais baixo B . Neste exemplo os alunos analisaram o movimento da boia segundo os resultados obtidos pela modelagem do sistema nos pontos B e C utilizando a segunda lei de Newton. Foto extraída de [Verrückt 2014].	43
4.8	Circuito de Interlagos utilizado para os alunos representarem os vetores força \vec{F} e velocidade \vec{v} dos carros em alguns pontos especificados pelo professor. Figura extraída de [Interlagos 2007]. No trecho A foi considerado que os carros se moveriam com velocidade constante. São apresentados também respostas de alguns alunos. O círculo vermelho no canto inferior esquerdo da figura foi inserido para destacar a representação do vetor força no trecho em que temos MRU.	44
4.9	(a) Rotor de raio R girando em torno do seu próprio eixo com velocidade v constante. Uma pessoa apoiada na parede interna do cilindro vertical permanece apoiada mesmo depois que o piso é removido, pois sua força peso é equilibrada pela força de atrito da parede sobre a pessoa. Mostramos também o desenvolvimento dos cálculos de forma correta em (b) e alguns erros cometidos pelos alunos em (c) e (d). Fonte: Autor e alunos.	48
4.10	À esquerda ilustramos três veículos percorrendo três trajetórias circulares horizontais com raios de curvatura diferentes sob o efeito da força de atrito \vec{f}_{at} . À direita apresentamos os cálculos de alguns alunos para obtenção da velocidade máxima para os veículos fazerem as curvas sem perderem o traçado da mesma, sendo dada por $v = \sqrt{g\mu R}$. Fonte: Esquerda autor e direita alunos.	50
4.11	Representação do automóvel se movendo em uma pista inclinada por um ângulo $\theta = 100^\circ$ mostrando a justificativa dos alunos da impossibilidade de realizar o movimento. Fonte: Alunos.	52

4.12	<p>(a) Ilustração de um carro em uma pista inclinada por um ângulo θ e todas as forças relevantes para nossa análise, sendo \vec{F}_c a resultante centrípeta, \vec{N} a reação normal da pista no carro, \vec{P} sua força peso, R o raio de curvatura com relação ao centro de curvatura CV e duas situações diferentes consideradas para a força de atrito. Na situação 1 consideramos $f_{at}^{(1)}$ para dentro da curva e na situação 2 consideramos $f_{at}^{(2)}$ para fora da curva. (b) Mostramos os respectivos gráficos da velocidade do carro v em função do ângulo θ para ambas situações, obtidos a partir da decomposição de forças para cada caso. Para este gráfico nós consideramos $g = 9,81m/s^2$, $R = 10m$ e $\mu = 1$. Fonte: Autor.</p>	53
4.13	<p>Desenvolvimento dos cálculos dos alunos para obtenção de v_1, (4.3). Fonte: Alunos.</p>	54
4.14	<p>Respostas de alguns alunos para a análise do gráfico apresentado na Fig.4.12(b). Fonte: Alunos.</p>	57
A.1	<p>(a) Ilustração de uma moeda de raio r_m envolvida por um barbante de forma bem ajustada mostrando a nova circunferência de raio R_m formada pelo barbante após acrescentarmos 1m em seu comprimento. O ponto de interrogação é a folga $R_m - r_m$ que os alunos precisam discutir se será maior, menor ou igual à folga entre o barbante e o planeta Terra nas mesmas condições (b). Fonte: Autor.</p>	67
A.2	<p>(a) Veículo com velocidade \vec{v} se movendo em uma superfície com raio de curvatura R, passando pelo ponto mais alto da superfície. (b) Ilustramos o mesmo veículo passando pelo ponto mais baixo de um declive com mesmo raio de curvatura. São apresentadas a reação normal da superfície \vec{N}_1 e \vec{N}_2, para (a) e (b), respectivamente, e a força peso $m\vec{g}$. Fonte: Autor.</p>	71

A.3	<p>(a) Esboço do gráfico do volume pela pressão para um processo isotérmico ($T = cte$) obtido a partir da função descrita na eq.(A.5). A função neste caso é uma hipérbole com constante $C_1 = nRT$. (b) Mostramos o volume em função da temperatura para um processo isobárico ($P = cte$). A função agora é linear com coeficiente angular dado por $C_2 = nR/P$. Fonte: Autor.</p>	74
A.4	<p>Magnitude e direção do vetor velocidade \vec{v} de um objeto localizado na posição (x, y, z) de um sistema de coordenadas cartesianas com relação à origem $(0, 0, 0)$. Fonte: Autor.</p>	77
A.5	<p>Gráfico da velocidade em função do tempo para uma partícula com aceleração constante a, dada pela inclinação da reta, ou seja, $a = [v(t) - v_0] / t$. Fonte: Autor.</p>	79
A.6	<p>(a) Rotor de raio R girando em torno do seu próprio eixo com velocidade v constante. Uma pessoa apoiada na parede interna do cilindro vertical permanece apoiada mesmo depois que o piso é removido, pois sua força peso é equilibrada pela força de atrito da parede sobre a pessoa. (b) Ilustração de três veículos percorrendo três trajetórias circulares horizontais com raios de curvatura diferentes sob o efeito da força de atrito \vec{f}_{at}. Fonte: Autor.</p>	82
A.7	<p>Ilustração de um carro em uma pista inclinada por um ângulo θ e todas as forças relevantes para a obtenção da equação geral para a velocidade limite do veículo, sendo \vec{F}_c a resultante centrípeta, \vec{N} a reação normal da pista no carro, \vec{P} sua força peso, R o raio de curvatura com relação ao centro de curvatura CV e duas situações diferentes consideradas para a força de atrito. Na situação 1 consideramos $f_{at}^{(1)}$ para dentro da curva e na situação 2 consideramos $f_{at}^{(2)}$ para fora da curva. Fonte: Autor.</p>	85

<p>A.8 Gráficos das velocidades do carro nas situações 1 (v_1) e 2 (v_2), ilustradas na Fig.A.7, em função do ângulo de inclinação da pista θ. Estes são obtidos das eqs.(A.18) e (A.19) em que foram consideradas as forças de atrito $f_{at}^{(1)}$ e $f_{at}^{(2)}$, respectivamente, utilizando os parâmetros $g = 9,81m/s^2$, $R = 10m$ e $\mu = 1$. A área hachurada é para destacar ângulos maiores que $\pi/2$ para a velocidade limite v_2. Fonte: Autor.</p>	90
<p>A.9 Sistema massa-mola descrito pela lei de Hooke $F(x) = -kx$, mostrando que quando a massa m se desloca de sua posição de equilíbrio estável ($x = 0$), a força restauradora $F(x)$ fornecida pela mola de constante elástica k faz com que a mesma retorne a $x = 0$. É por isso que esta força é chamada de restauradora, pois ela age no sentido de restaurar a posição de equilíbrio estável do sistema. A contante A ou $-A$ descreve a amplitude do movimento. Fonte: Autor.</p>	91
<p>A.10 (a) Partícula em movimento circular uniforme com velocidade \vec{v}, mostrando a trajetória circular s de raio R e ângulo θ. (b) Se curvamos a trajetória retilínea dada pelo eixo x no MRU obtemos a trajetória circular s do MCU. Em ambos os casos temos um grau de liberdade. Fonte: Autor.</p>	93
<p>A.11 Partícula em movimento circular uniforme com velocidade \vec{v}, mostrando a projeção do vetor \vec{R} no eixo x, dada por $\vec{x}(t) = \vec{R} \cos [\theta(t)] (\hat{i})$, para obtenção da equação de movimento do oscilador harmônico. Fonte: Autor.</p>	96
<p>A.12 (a) Disposição do ângulo θ em torno do vetor velocidade \vec{v}. (b) Decomposição de \vec{v} em suas componentes \vec{v}_x e \vec{v}_y. (c) Decomposição do vetor aceleração centrípeta \vec{a}_C em suas componentes \vec{a}_{cx} e \vec{a}_{cy}. Fonte: Autor.</p>	97

A.13 Gráficos da posição $x(t)$, da velocidade $v(t)$ e da aceleração $a(t)$ como funções do tempo t , de uma partícula realizando um movimento harmônico simples para dois períodos de oscilação. No eixo do tempo são exibidos múltiplos de um quarto do período $T = 2\pi/\omega$. Note que as amplitudes ou valores máximos da posição, da velocidade e da aceleração, são dados, respectivamente, por A , ωA e $\omega^2 A$. Fonte: Autor. 101

A.14 À esquerda mostramos uma partícula em movimento circular uniforme com velocidade \vec{v} e sua projeção (cinza) no eixo x . Note que a partícula se desloca em x entre $-R$ e R , ou seja, a amplitude do movimento é dada por R . Abaixo é mostrado a evolução no tempo desta projeção, $x(t)$ vs. t . À direita observa-se que o movimento da projeção da partícula no eixo x , mostrado à esquerda, é o mesmo de uma massa presa a uma mola se movendo entre $-A$ e A . Em ambos os casos o eixo do tempo t foi colocado na vertical apontando para baixo, com o sistema evoluindo em um tempo total de um período T , ou seja, de $t_0 = 0$ à $t = T$. Fonte: Autor. 103

Lista de Tabelas

4.1	Propriedades dos vetores força \vec{F} e velocidade \vec{v} no movimento retilíneo uniforme (MRU) e movimento curvilíneo uniforme (MCU). As siglas V, C e N significam varia, constante e nula, respectivamente. Os números correspondem ao número de alunos, num total de 22, que forneceram as respectivas respostas.	46
A.1	Equações específicas reproduzidas a partir de condições particulares para alguns parâmetros do sistema, como o ângulo de inclinação θ e o coeficiente de atrito μ , inseridas nas equações gerais (A.18) e (A.19) para as velocidades limite v_1 e v_2 , respectivamente, de um veículo em movimento numa pista inclinada.	89
A.2	Valores da posição $x(t)$, da velocidade $v(t)$ e da aceleração $a(t)$ do oscilador harmônico para $\phi = 0$ e considerando múltiplos de $T/4$ para o tempo t	100

Sumário

1	Introdução	1
2	Revisão da Literatura e Justificativa	4
2.1	A Matematização no Ensino de Física	4
2.2	Justificativa	9
3	Fundamentação Teórica e Preparação do Produto Educacional	10
3.1	Utilizando a Matemática para Ensinar Física	10
3.2	Conteúdo de Física	15
3.3	Referencial Teórico	27
4	Descrição da Metodologia e Aplicação do Produto	29
4.1	Atividade 1: A matemática como objeto auxiliador de nossa intuição	30
4.2	Atividade 2: A importância das funções na ciência	33
4.3	Atividade 3: Aplicações da segunda lei de Newton	36
4.4	Atividade 4: Abstraindo informações sobre o fenômeno físico a partir de sua modelagem matemática	40
4.5	Atividade 5: Tratamento de sistemas mais complexos e utilização de gráficos	47
4.6	Fechamento das Atividades	57

5	Considerações Finais	60
	Referências Bibliográficas	62
A	Produto Educacional	64
A.1	Sobre a aplicação do produto	65
A.2	A matemática e nossa intuição: uma combinação poderosa	66
A.3	Abstraindo informações sobre o fenômeno físico a partir de sua modelagem matemática	69
A.4	A utilidade das funções na ciência	73
A.5	Prevendo o futuro de um sistema a partir de uma lei física: Newton vs. Aristóteles	74
A.6	Equação geral e seus casos particulares: movimento com atrito	80
A.7	Lei de movimento de um sistema com força variável: Movimento Harmônico Simples	91
A.8	Análise do Movimento Harmônico Simples através de gráficos	98

Capítulo 1

Introdução

A evolução das ideias de um cientista da área de exatas, em seus estudos sobre os fenômenos naturais, pode ser concebida a partir de dois métodos bem conhecidos: o da experimentação e da observação e o método do raciocínio matemático. O primeiro é baseado na coletânea e análise de dados obtidos a partir da observação dos fenômenos que ocorrem na natureza ou daqueles que são reproduzidos e controlados em laboratórios. O segundo, além de auxiliar na análise dos dados obtidos através do primeiro método, possibilita inferir resultados sobre experimentos que ainda não foram executados ou mesmo prever fenômenos nunca observados. Não existe nenhuma razão lógica do porquê o segundo método ser possível. Essa concepção poderosa, que é a matemática, revela a infinidade de padrões e simetrias existentes na natureza, podendo fornecer respostas a quem tem o domínio da mesma que um observador casual não suspeitaria [Dirac 1939].

Percebe-se pelo exposto acima, que a matemática não é só uma mera ferramenta. Ela é parte das ciências e nos fornece a forma de expressar os fenômenos naturais de maneira universal, ou seja, é uma linguagem única utilizada no mundo todo. Nas palavras de Eugene Wigner, *“o milagre da adequação da linguagem da matemática para a formulação das leis da natureza é um dom maravilhoso que não entendemos nem merecemos”* [Wigner 1960]. É muito difícil dizer o que é a matemática e descrever o seu papel e importância nas ciências. Para nós a matemática está para a física, e vice versa, assim como a partitura está para a música. Você pode ser um músico nato, tocar um instrumento reproduzindo tudo

que ouve e até mesmo criar novos estilos ou obras incríveis. Mas se você quiser compartilhar a sua genialidade e ver sua obra ganhar espaço diante de um público cada vez maior ou então tocar obras que você nunca ouviu, inevitavelmente você recorrerá às partituras. De outra forma todo o seu conhecimento e evolução de conceitos não poderá ser reproduzido e nem acessado por outras pessoas. Claro que muitos irão dizer que, se colocarmos dessa forma, pode parecer que o papel da matemática se reduz apenas à comunicação do conhecimento científico. De fato precisamos reconhecer que a matemática vai muito além disso, pois possui uma estrutura própria que nos permite sermos bons inquiridores sobre os fenômenos da natureza mesmo que a experimentação esteja fora do alcance tecnológico da época. Como exemplo podemos citar a teoria da relatividade de Einstein, a detecção das ondas gravitacionais e do bóson de Higgs, a simetria das equações de Maxwell entre outros. Por estes e outros exemplos é que acreditamos que a física e a matemática são inseparáveis e precisam caminhar juntas.

Portanto, a matemática é, indiscutivelmente, indispensável para quem trabalha com ciências. Mas o mesmo argumento é válido para alunos do ensino básico? Quando se trata deste público é muito comum os seguintes questionamentos: Qual a necessidade de aprender matemática para ensinar física? Pois os alunos, em sua maioria, não irão seguir uma carreira de físico ou outra área das ciências. Afinal de contas, por que aprender essa aliança entre física e matemática, que dizem ser tão poderosa, se o interesse não for puramente científico? Para a maioria dos alunos a física e a matemática são meros obstáculos para passar no vestibular ou para a formação básica, porque faz parte do currículo escolar. A falta de utilidade, vista pelos alunos, seria então o motivo de tanta rejeição e desmotivação em aprender tais disciplinas?

Os motivos desta grande rejeição muitas vezes são desconhecidos do professor, pois sua profissão acaba sendo solitária, com pouca ou nenhuma relação com os profissionais das outras áreas. Diagnosticar a defasagem em física pela falta de pré-requisitos matemáticos que deveriam ter sido aprendidos em séries anteriores torna-se uma maneira mais simples de aceitar o fracasso no ensino de física. Isso acaba eximindo o professor de qualquer culpa que caiba uma reflexão em sua metodologia sobre a maneira que a física possa atingir o aluno, mesmo

aquele que não apresenta afinidades com as ciências exatas.

O desinteresse dos alunos em aprender física exige que repensem nossa atuação enquanto professores em nossas atividades de docência. Não é fácil para um professor reconhecer que está despreparado para abordar determinados assuntos e que seria necessário procurar outros colegas mais experientes para tirar dúvidas. O ego na academia as vezes acaba impedindo que isso seja feito e que parcerias promissoras possam ser estabelecidas. Além disso, existem exigências curriculares, é preciso cumprir determinados conteúdos para aprovação dos estudantes nos vestibulares. Essa é a prioridade nos dias de hoje e não o desenvolvimento de habilidades, aprendizagem de conceitos e a aplicação do conhecimento. Tudo isso colabora para o distanciamento de uma ciência voltada para o mercado de trabalho ou que tenha alguma conexão com a vida diária dos alunos. De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), a educação básica *“tem por finalidade desenvolver o educando, assegurando-lhe uma formação indispensável para o exercício da cidadania, fornecendo-lhe os meios necessários para o seu progresso nos estudos superiores e na vida profissional”* [Brasil 1996]. Para isso, as ciências e a matemática são indispensáveis.

Neste trabalho pretendemos apresentar ao leitor a importância de se conduzir a matemática em consonância com as aulas de física, apresentando um produto inovador que não se encontra nos materiais didáticos convencionais, tornando a matemática e a física mais atraentes. Esta proposta foi aplicada junto a alunos do 3º ano do ensino médio do Colégio Santa Bárbara em Bragança Paulista, São Paulo. Diversos conceitos foram explorados, tanto da física quanto da matemática, através da análise e modelagem de simples sistemas físicos relacionados com o dia a dia dos alunos. Ao final da aplicação da proposta foi elaborado um material paradidático detalhado para auxiliar professores de física do ensino médio a motivar seus alunos a enxergar a importância da matemática não só para o melhor entendimento da física, tornando-as disciplinas mais atraentes e úteis, mas também como uma disciplina essencial para a formação pessoal dos mesmos, podendo ser útil para qualquer área do conhecimento.

Capítulo 2

Revisão da Literatura e Justificativa

“O matemático não deve ser para o físico um simples fornecedor de fórmulas; é preciso que haja entre eles uma colaboração mais íntima. A física matemática e a análise pura não são apenas potências limítrofes, que mantêm relações de boa vizinhança; penetram-se mutuamente, e seu espírito é o mesmo.”

Henri Poincaré ¹

2.1 A Matematização no Ensino de Física

É muito comum professores de física e alguns autores de livros didáticos colocarem a matemática como uma mera ferramenta ou como a linguagem da física, ou seja, como se a matemática só fosse legitimada ao ser aplicada nas ciências. Talvez a grande quantidade de exercícios fechados e numéricos dos materiais didáticos corrobore com esse raciocínio, além das avaliações de vestibulares que exigem um exagerado formalismo matemático. Comum também são professores de física atribuírem baixo rendimento na disciplina pela falta de requisitos básicos de matemática, dando a ideia de que só se aprende física com

¹H. Poincaré. “*O Valor da Ciência*”. Tradução de Maria Helena Franco Martins. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

a utilização frequente da matemática, que deveria ter sido ensinada por outro professor, isentando-os da responsabilidade de ensinar qualquer tópico adicional referente a matemática.

A relação entre os desenvolvimentos na física e na matemática é muito mais complicada do que parece e há muito mais interrelação entre elas do que alguém ingenuamente espera. Por isso, não faz sentido reduzirmos uma destas disciplinas como sendo apenas uma aplicação ou ferramenta da outra. Deixe-nos mencionar Wigner novamente,

“É verdade, é claro, que a física escolhe certos conceitos matemáticos para a formulação das leis da natureza, e certamente somente uma fração de todos os conceitos da matemática é utilizada em física. É também verdade que os conceitos que foram escolhidos, não foram selecionados arbitrariamente a partir de uma lista de termos matemáticos, mas foram desenvolvidos, em muitos se não na maioria dos casos, independentemente pelo físico e reconhecidos como tendo sido concebidos antes pelo matemático.” [Wigner 1960].

Segundo Karam, um matemático ao ser questionado sobre a importância da física para a matemática *“possivelmente associará esta a uma aplicação de sua atividade ao mundo ‘real’, porém deixará muito claro que a Matemática é independente da realidade concreta e defenderá arduamente que os objetos matemáticos são criações, abstrações, produtos do pensamento humano, dissociados do mundo da experiência”* [Karam 2007].

Portanto, no contexto escolar, não se trata de abolir a matemática ou rebaixá-la a um instrumento no ensino de física, mas sim de comunicar aos alunos quais tópicos da mesma são importantes para determinados desenvolvimentos na tentativa de estabelecer uma conexão entre as duas disciplinas. A interrelação entre os professores de matemática e física é importante para a evolução cognitiva dos alunos. Esta pode propiciar oportunidades de utilizar novas abordagens para ensinar o conteúdo, associando a física do mundo do trabalho e do cotidiano com a matemática que está sendo ensinada. O professor de física terá mais facilidade em

ensinar aos alunos os cálculos envolvidos na determinação das grandezas físicas com o auxílio do professor de matemática, assim como o professor de matemática terá condições de aplicar os conceitos matemáticos utilizando situações cotidianas da física. Por exemplo, o professor pode preparar sua aula sobre funções do 2º grau e seus gráficos utilizando conceitos e situações-problema que envolvam movimento uniformemente variado. Esses profissionais ao definirem uma linguagem em comum nas duas disciplinas tornarão a tarefa de fazer o aluno aprender conceitos de funções mais fácil tanto na matemática quanto na física.

Karam ainda exemplifica algumas situações que mostram que as experiências físicas foram utilizadas como ponto de partida para os matemáticos procurarem respostas para certas questões, como o advento das derivadas para o entendimento dos movimentos. Por outro lado, verificamos também casos em que construções matemáticas originaram novos conceitos e indagações na física, como as previsões das equações de Maxwell, em que cálculos matemáticos mostraram que a velocidade das ondas eletromagnéticas é igual à da luz, e a posterior emissão e detecção das mesmas por Hertz [Karam 2007].

Alguns conceitos ensinados no ensino médio podem ser compreendidos com maior facilidade pelos alunos sem sua matematização, uma vez que em situações cotidianas alguns fenômenos podem ser submetidos a um simples exercício mental. Dessa forma os alunos podem avaliar se o mesmo é possível de ocorrer ou se está dimensionado corretamente. A matematização acaba sendo inevitável em algumas situações que envolvam dimensões muito grandes ou muito pequenas, como no caso de o professor dizer para o aluno que fótons emitidos por uma fonte de luz amarela podem produzir efeito fotoelétrico em uma placa de sódio metalizado. Nestes casos podemos nos deparar com conceitos abstratos, como o fóton, que tem uma definição operacional em termos de operadores de aniquilação e destruição para os físicos teóricos, enquanto que para os experimentalistas o fóton é definido como um “*click*” em um detector. Desta forma fica praticamente impossível tratar o conceito de fóton intuitivamente. Uma abordagem razoável para o ensino básico seria dizer que o fóton é uma partícula elementar que compõe o campo eletromagnético cuja energia é dada matematicamente por $E = hf$, em que h é a constante de Planck e f a frequência da luz. Nestas situações a

matemática será a responsável por uma análise mais satisfatória para o aluno compreender melhor e também criticar a forma com que o fenômeno em questão é tratado. Poincaré ainda afirma que *“o objetivo da física matemática não é só o de facilitar ao físico o cálculo numérico de certas constantes, ou a integração de certas equações diferenciais. Mas ele é, sobretudo, o de facultar ao físico o conhecimento da harmonia oculta das coisas, fazendo com que as veja sob uma nova perspectiva”* [Poincaré 1995].

Para Pietrocola *“não se trata apenas de saber matemática para poder operar as teorias físicas que representam a realidade, mas saber apreender teoricamente o real através de uma estruturação matemática”* [Pietrocola 2002].

Professores de física e matemática trabalham sem nenhuma inter-relação, mesmo os alunos percebendo que são áreas correlacionadas. Os estudos de Paulino et al. [Paulino 2007] mostram que 90% dos 200 alunos entrevistados de escolas públicas de três cidades do interior da Paraíba, disseram que para aprender física é necessário saber matemática. Os livros didáticos representam um outro problema a ser considerado, pois colaboram muito pouco para que as disciplinas sejam integradas. Geralmente não há adequações dos conteúdos para uma conexão entre as mesmas.

Um exemplo de situação ideal seria ministrar aulas de física direcionadas a ensinar movimento retilíneo e uniforme, enquanto que nas aulas de matemática os alunos trabalhassem com o conceito de função afim e suas representações gráficas. Isso faria com que o aluno percebesse essa integração. Como diz Pietrocola, seria perfeito para o professor de física se os alunos chegassem à sala de aula com os pré-requisitos matemáticos completos. Infelizmente o que vemos é uma divergência onde os professores de Matemática e Física não estabelecem colaborações de modo que as disciplinas são geralmente desarticuladas e o conteúdo de uma não se adequa ao conteúdo da outra de maneira concomitante [Pietrocola 2002].

Toda essa discussão nos leva a crer que não se trata apenas de adequação de materiais didáticos ou condições de trabalho, mas trata-se também da falta de colaboração entre os profissionais dessas disciplinas. Pois se assim não fosse,

bastaria seguirmos as regras e orientações estabelecidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), os quais corroboram com a ideia de integração destas disciplinas ao afirmar que,

“As características comuns à Biologia, à Física, à Química e à Matemática recomendam uma articulação didática e pedagógica interna à sua área na condução do aprendizado, em salas de aula ou em outras atividades dos alunos. [...] Uma organização e estruturação conjuntas dos temas e tópicos a serem enfatizados em cada etapa também facilitarão ações integradas entre elas, orientadas pelo projeto pedagógico da escola” [Brasil 2002].

Essa falta de colaboração entre os profissionais pode ter origem nas próprias universidades, pois os cursos de licenciatura em matemática e física, responsáveis pela formação de professores nestas áreas, geralmente trabalham de maneira isolada. Isso acaba consolidando a ideia de que o professor um profissional solitário sem comunicação com outras áreas. Além disso, existem outros problemas como ausência de objetivos educacionais claros e adequados, carência em estrutura e recursos didáticos, aumento da quantidade de informação a ser executada, entre outros [Tricario 1989]. Portanto, é muito difícil exigir que, os professores de física ou matemática do ensino básico, proponham qualquer atividade integradora com professores de outras disciplinas, uma vez que não foram preparados para essas atividades. Uma possível alternativa, que vem tentando amenizar esta falha dos cursos de graduação, é a criação recente dos mestrados profissionais em ensino de física e matemática, que apresentam um enfoque na atuação do professor que estimula a aprendizagem e participação dos alunos.

É importante deixar claro que a formação deficiente de um professor não é desculpa para impossibilitá-lo de buscar novas alternativas de abordagem para favorecer a integração entre as áreas do conhecimento. Para isso o professor deve se prontificar a fazer algo diferente, sempre tentando inovar sua atividade docente para fazer com que os alunos se tornem mais interessados e ativos em suas atividades.

2.2 Justificativa

Além do exposto acima, a justificativa para a escolha do tema deste trabalho está evidenciada nos resultados do Programa Internacional de Avaliação de Alunos de 2015, ou PISA (*Programme for International Student Assessment*), divulgados em Dezembro de 2016. O PISA é o exame educacional mais importante do mundo e é elaborado a cada três anos pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) com o objetivo de aferir a qualidade, equidade e eficiência dos sistemas escolares. Este mostrou mais uma vez que os alunos brasileiros ocupam as últimas posições do ranking [PISA 2015].

Cerca de 540 mil estudantes de 15 anos de idade de 72 países foram testados no PISA 2015. Nas três áreas avaliadas, ciências, leitura e matemática, os estudantes brasileiros tiveram desempenho abaixo da média da OCDE. Dentre os 72 países o Brasil ocupa a 63^a posição em ciências, a 59^a em leitura e a 66^a em matemática. Em ciências, os alunos brasileiros obtiveram 401 pontos contra 493 pontos da média da OCDE, em leitura, 407 pontos ante 493, e em matemática, 377 pontos contra 490. No quadro geral, cerca de 56% dos alunos pontuaram abaixo do nível considerado como adequado em ciências enquanto que a área de matemática revelou o quadro mais crítico, com 70,25% dos alunos estando abaixo do esperado.

Como já discutido, a deficiência em matemática pode ser extremamente prejudicial para a aprendizagem dos alunos nas áreas de ciências exatas como física, química e engenharias em geral. A articulação entre a matemática e a física proposta neste trabalho pode ser promissora até mesmo para as universidades, pois este problema já se estendeu nos cursos de graduação e está cada vez mais presente nos cursos de pós-graduação. Para suprir as deficiências de aprendizado do ensino básico, universidades, como a Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), campus de Sorocaba, e a Universidade de Brasília (UnB), criaram disciplinas extras de revisão como Matemática Elementar 1 e 2 e Pré-cálculo, e Introdução à Física e Física 0, respectivamente.

Capítulo 3

Fundamentação Teórica e Preparação do Produto Educativo

Todas as evidências que conhecemos nos levam a suspeitar que as generalizações podem ser feitas, embora é claro que, complexidades irão surgir no processo e alguns conselhos precisarão ser revisados à medida que aprendemos mais. Qual é a desvantagem de aplicar na sala de aula o que sabemos agora, mesmo se o conhecimento não é perfeito?

Roediger e Pyc ¹

3.1 Utilizando a Matemática para Ensinar Física

Qualquer professor que tenha preparado seriamente um curso sabe que os estudantes não formam um grupo homogêneo. Eles chegam em nossos cursos com diferentes níveis de conhecimento sobre o conteúdo da matéria em questão, uma diversidade de habilidades intelectuais e técnicas e uma variedade de crenças e atitudes apresentadas durante o desenvolvimento do curso, como consequência

¹H. L. Roediger and M. A. Pyc. “Applying cognitive psychology to education: Complexities and prospects”. *Journal of Applied Research in Memory and Cognition*, **1**, 263-265, 2012.

de suas vivências e experiências próprias. De fato, os preconceitos dos alunos são fatores que podem influenciar significativamente em sua aprendizagem e desenvolvimento cognitivo, pois naturalmente, esses conceitos prévios entram em choque com conceitos estabelecidos por outras pessoas, concebidos de uma forma completamente diferente daquela que eles pensavam.

Diante deste cenário a primeira questão que nós nos deparamos foi: Como ensinar a maioria dos alunos, com toda essa diversidade de habilidades, conhecimentos e interesses, que a matemática pode auxiliar de maneira fundamental no avanço do nosso conhecimento científico, particularmente nas aulas de física? Para isso nós utilizamos conceitos de matemática que, a princípio, já estavam pré-estabelecidos para os alunos, como funções, vetores e geometria.

A escolha de uma introdução adequada para o curso é fundamental. Pois, se os alunos não tiverem um conhecimento prévio acurado, suficiente e apropriado sobre o assunto, ficará mais difícil para os mesmos desenvolverem habilidades mais complexas e construir seu aprendizado nesta base. Isto pode tornar todo o trabalho do professor apenas em um exercício de memorização para realização de provas. Desta forma os alunos perderão o interesse no curso, transformando-o em um obstáculo chato e sem sentido para sua formação.

Utilizando um discurso socrático, conduzindo um diálogo com perguntas simples, iniciamos demonstrando aos alunos como a matemática pode auxiliar de forma avassaladora a nossa intuição, sem que fiquemos limitados a um “achismo” sem fundamentação ou argumentos fortes.

Para isso nós utilizamos um exemplo do célebre livro de geometria analítica do Paulo Boulos [Boulos 1987]. Considerando a circunferência de uma moeda de 1 real envolvida por um barbante de maneira bem ajustada, os alunos tiveram que responder se, após aumentarmos 1 metro no comprimento do barbante, dado pelo comprimento da circunferência da moeda, a folga entre a moeda e o barbante é maior, menor ou igual à folga entre um barbante e o planeta Terra nas mesmas condições. Em todos os cenários que utilizamos este exemplo, a maioria dos alunos responderam que a folga entre o raio da Terra e o barbante, após o acréscimo de 1 metro em sua circunferência, é muito menor que no caso da moeda.

As respostas geralmente estão alicerçadas no argumento de que 1 metro é uma distância muito pequena diante da dimensão do raio do planeta Terra, enquanto que para a moeda é muitas vezes maior que o seu raio. Após um pouco de discussão os próprios alunos se convenceram de que era necessário apelarmos para algum tipo de equacionamento para chegarmos a uma conclusão, pois os argumentos baseados apenas na intuição eram pouco convincentes e insuficientes para um desfecho satisfatório do problema.

Se chamarmos o raio da moeda de r_m , o raio da Terra de r_T e os novos raios, após o acréscimo de 1m no comprimento da circunferência de ambos, de R_m e R_T , respectivamente, tem-se para a moeda,

$$\begin{aligned} 2\pi r_m + 1 &= 2\pi R_m \\ R_m - r_m &= \frac{1}{2\pi}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

em que $R_m - r_m$ é a folga entre a moeda e o barbante. Realizando o mesmo procedimento para o planeta Terra, obtemos para a folga entre a Terra e o barbante $R_T - r_T = 1/2\pi$. Ou seja, a folga é a mesma nas duas situações e mede em torno de 16cm. O resultado matemático nos diz que a folga é independente do raio da circunferência do corpo envolvido pelo barbante. Ou seja, se realizarmos o experimento envolvendo a circunferência de uma bola de futebol ou a circunferência de qualquer outro objeto ou planeta com um barbante, o resultado será sempre o mesmo.

Este resultado chocou muitos alunos que, mesmo diante de um procedimento bem elaborado matematicamente, resistiam em acreditar que não havia diferença. Este tipo de resistência e conflito é muito comum no ensino de ciências, porque os alunos possuem suas próprias concepções. Foi necessário realizar a revisão dos cálculos mais de uma vez para que houvesse a compreensão do resultado. Com este exemplo, foi possível concluir, portanto, a necessidade de confirmarmos formalmente ideias intuitivas, independentemente da área do conhecimento. Nas ciências isso é imprescindível, pois em muitos casos não é possível realizarmos o experimento de imediato para confirmarmos nossas hipóteses, seja por questões financeiras ou por limitações tecnológicas da época. Como um aluno poderia envolver o planeta Terra com um barbante utilizando apenas suas habilidades

motoras e de observação, para comprovar sua hipótese sobre o tamanho da folga obtida em comparação com a mesma utilizando-se uma moeda? Felizmente, nada nos impede de tratar o sistema matematicamente e chegar a uma conclusão plausível.

O segundo passo foi mostrar que é possível abstrair uma enorme quantidade de informações sobre o fenômeno em estudo a partir de sua modelagem matemática, mesmo que os alunos não tenham observado o fenômeno em uma aula prática ou no dia a dia. Iniciamos com a discussão sobre o primeiro postulado da teoria da relatividade restrita de Einstein. Este é o princípio da constância da velocidade da luz que diz que, a velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor c em todos os referenciais inerciais, independentemente do movimento relativo da fonte e do observador. Este exemplo é pertinente porque Albert Einstein é uma figura popular e conhecido por todos. Após a contextualização sobre referenciais inerciais e movimento relativo perguntamos aos alunos como Einstein poderia ter chegado à conclusão de que a velocidade limite do universo é c e por qual razão esta é uma constante. A maioria das respostas foi, porque Einstein era um gênio e sabia muito sobre física. Ficou claro o quão forte é a iconização na ciência. A maioria dos alunos pensam que, para aprender ciências é necessário ser um gênio. Veja como desmistificamos isso.

A partir das equações de Maxwell do eletromagnetismo é possível concluir que a luz é uma onda eletromagnética através do resultado obtido matematicamente, que nos diz que $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$. Este é precisamente a velocidade da luz no vácuo obtida experimentalmente ($c \approx 300.000\text{km/s}$) e os parâmetros μ_0 e ϵ_0 são constantes da natureza que nos diz o quão permeável é o vácuo para linhas de campos magnéticos e elétricos, respectivamente. Com esta contextualização, não foi difícil para os alunos concluírem que se μ_0 e ϵ_0 são constantes, necessariamente c também é uma constante da natureza.

Para mostrar que a velocidade da luz é a velocidade limite do universo para transmissão de informação nós utilizamos a fórmula da contração de Lorentz, dada por:

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (3.2)$$

a qual especifica a relação entre o comprimento L de um objeto, que se move a uma velocidade v com relação a um observador, e seu comprimento L_0 , medido quando o objeto está em repouso. Fizemos uma análise matemática da raiz quadrada da eq.(3.2) mostrando que, para obtenção de um número real e diferente de zero para L , necessariamente precisamos ter $v < c$. Essa condição é necessária, pois como o comprimento é uma propriedade física, este deve ser expresso por números reais. Mesmo que a raiz exista para $v = c$, não tem sentido físico a partícula desaparecer ($L = 0$) porque sua velocidade é igual à velocidade da luz, ou seja, isto mostra claramente a necessidade da matemática e da física caminharem juntas. Se $v > c$ teremos uma raiz negativa, portanto não expressa a realidade física do objeto. Logo, a conclusão é que a velocidade do objeto será sempre menor que a velocidade da luz, $v < c$, ficando assim demonstrado matematicamente que a velocidade c é uma velocidade limite.

Note a quantidade de informações e conclusões que conseguimos obter a partir de uma simples equação envolvendo uma raiz quadrada. Com este exemplo os alunos puderam chegar nas conclusões de um dos maiores cientistas do século XX, tornando evidente a necessidade da utilização da matemática para a interpretação de resultados que podem ser de extrema importância para a ciência e, conseqüentemente, o desenvolvimento de novas tecnologias. Isso foi extremamente motivador para os alunos.

Neste último exemplo também fica clara a importância de trabalharmos com funções na física. Uma função fornece um único valor de $f(x)$ para cada valor do parâmetro x , de modo que, no exemplo da contração de Lorentz temos uma função que fornece um único valor para o comprimento L para cada valor da velocidade v , ou seja, $L = L(v)$. Portanto, é possível concluir que as funções são utilizadas em ciências para estabelecermos relações entre propriedades físicas.

Na próxima seção mostraremos de forma mais elaborada como alguns conteúdos da Física, aliados à Matemática, foram adaptados para serem adequadamente tratados no ensino médio.

3.2 Conteúdo de Física

Para mostrarmos como a relação entre a física e a matemática pode ser fortalecida no ensino de física, nós escolhemos trabalhar com a física clássica. Esta inclui as equações de Newton para o movimento de partículas, a teoria de Maxwell-Faraday dos campos eletromagnéticos e a teoria da relatividade geral de Einstein. Quando dizemos que alguma área da física, como as leis de Newton do movimento, pertence à física clássica, significa que esta é descrita por um conjunto de princípios e regras obtidos através de uma lógica subjacente que governa todos os fenômenos nos quais a incerteza quântica não é importante. É instrutivo que esse conjunto de regras e princípios, descrito em maiores detalhes no apêndice dessa dissertação, seja evidenciado quando a física clássica for tratada em sala de aula. Esta não pode ser tratada meramente como um conjunto de teorias específicas de fenômenos específicos descritos por equações que são tiradas da cartola sem muito significado ou qualquer tipo de elaboração. Se o aluno tiver um conhecimento mínimo das regras e princípios que regem a física clássica a introdução da física quântica será mais fácil, pois ficará mais evidente a ruptura de pensamento, e conseqüentemente as mudanças que precisam ser feitas nestes princípios, durante a transição de uma teoria para outra.

Note que a física clássica possui uma infinidade de assuntos interessantes. Qual tópico seria o mais conveniente para iniciarmos um curso de física? Aquele que o professor achar mais conveniente, desde que seja possível trabalhar os elementos principais da física para uma boa aprendizagem e interesse dos alunos.

Acreditamos que todos que tenham cursado a disciplina de física no ensino básico tenham estudado, ou pelo menos ouvido falar, no movimento retilíneo uniforme. Alguns alunos e até nós mesmos, as vezes nos perguntamos de forma preconceituosa, por que estudar uma forma tão arcaica de movimento em pleno século XXI se hoje nós temos ônibus espaciais, a física quântica, a relatividade e a descoberta de uma infinidade de novas partículas? Por que não estudar a física do século XX que nós vemos todos os dias nos diversos meios de comunicação, a qual vem carregada de sensacionalismo e experimentos desenvolvidos com equipamentos super modernos? Para nós a resposta é imediata. Nós queremos começar pela

forma mais simples e fácil de movimento da matéria e que trás toda informação necessária sobre as regras e princípios da mecânica clássica. Como qualquer outra área do conhecimento, geralmente tentamos introduzir um assunto da forma menos complicada possível.

A simplicidade quando conduzida de forma apropriada pode ser extremamente útil para o aprendizado dos alunos e até despertar o interesse dos mesmos para uma futura carreira. O produto educacional desenvolvido nesta dissertação tem por objetivo guiar o professor neste caminho simples e repleto de informações úteis para o ensino de física utilizando alguns poucos tópicos da mecânica clássica reforçados com uma matemática adequada para o ensino médio.

Um dos papéis da mecânica clássica é predizer o futuro. Isso significa que se nós sabemos tudo sobre um sistema em um determinado instante de tempo, e se nós sabemos as equações que governam como o sistema muda no tempo, então nós poderemos predizer o futuro do mesmo. Dessa forma teremos condições de dizer onde o sistema estará em um tempo posterior. É isso que significa dizer que as leis da física clássica são *determinísticas*. Esta é uma palavra chave essencial para introduzir tópicos mais abstratos da física, como a mecânica quântica. Da mesma forma, se for possível descrever o passado do sistema utilizando os mesmos procedimentos e equações, nós dizemos que o sistema é *reversível*. Ou seja, a mecânica clássica nos permite dizer para onde o sistema vai e de onde o sistema veio utilizando as mesmas leis de movimento.

Para obtermos as equações de evolução de um sistema precisamos de uma lei física. Um sistema que evolui no tempo é chamado de sistema dinâmico. Portanto, nós precisamos de uma lei dinâmica que nos fornecerá as regras sobre como predizer o futuro do sistema. Ou seja, nós queremos descobrir para qual estado o sistema evoluirá a partir de um estado inicial conhecido.

Para resolução de problemas sobre dinâmica utilizamos a segunda lei de Newton,

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (3.3)$$

em que a força resultante \vec{F} é dada pelo produto da massa m do objeto pela sua aceleração \vec{a} . Em outras palavras, a força é igual a massa vezes a taxa com

que a velocidade do objeto muda, uma vez que $\vec{a} = \Delta\vec{v}/\Delta t$. Uma informação importante que pode ser abstraída da eq.(3.3) é, se não há força aplicada em um corpo, não há mudança em sua velocidade. Mas esta informação só pode ser obtida a partir da forma matemática da eq.(3.3). Esta é uma equação vetorial, pois ambas a força e a aceleração são vetores.

Matematicamente, um vetor é definido como um seguimento de reta orientado no espaço. Em ciência é muito comum descrevermos certas propriedades utilizando vetores, de modo que estas são apresentadas através de sua magnitude, direção e sentido. O tamanho da seta fornece a magnitude da propriedade em estudo e é representada por um número. Quando este número, acompanhado de uma unidade, é suficiente para descrever uma propriedade física, como no caso da massa, da temperatura, do tempo, etc. estamos trabalhando com grandezas escalares. Por outro lado, para descrevermos uma força ou a aceleração de um corpo, precisamos acrescentar ao escalar a sua direção e o seu sentido, pois estas são grandezas vetoriais. É por isso que a força resultante em um corpo possui a direção de seu movimento, pois a equação vetorial dada por (3.3) nos diz que o vetor força é diretamente proporcional ao vetor aceleração. Portanto, a existência de força sendo aplicada em um sistema significa que o vetor velocidade está mudando. Isso implica que a força pode ocasionar apenas uma mudança na direção da velocidade, ou do movimento, e não necessariamente na sua magnitude, como ocorre no caso da força centrípeta em um movimento circular uniforme.

Para representar a magnitude, a direção e o sentido das propriedades de um corpo em movimento, por exemplo, é necessário um sistema de coordenadas. Sua construção começa com a escolha de um ponto do espaço para ser a origem do sistema de coordenadas. Isso é chamado de referencial. O movimento do corpo será representado e descrito matematicamente com relação a esta posição de referência. A escolha desta referência é arbitrária, isto significa que a origem do sistema de coordenadas pode ser colocada em qualquer posição. Geralmente tal escolha é feita para fazer com que as equações de movimento se tornem o mais simples possível. O próximo passo é escolher três eixos perpendiculares. Estes também podem ser colocados em qualquer posição, desde que os mesmos sejam perpendiculares. Os eixos são usualmente chamados de x , y e z , mas também

podem ser chamados de x_1 , x_2 e x_3 , de a , b e c , ou qualquer outro nome desejado. Este sistema de eixos é chamado de sistema de coordenadas cartesianas. Na Fig.3.1 é representado o vetor velocidade de um objeto localizado na posição (x, y, z) de um sistema de coordenadas cartesianas com relação à origem $(0, 0, 0)$.

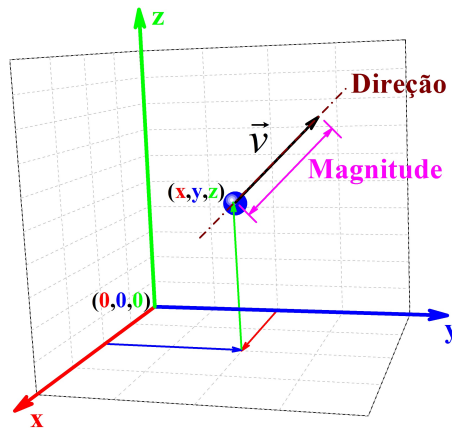


FIGURA 3.1: Magnitude e direção do vetor velocidade \vec{v} de um objeto localizado na posição (x, y, z) de um sistema de coordenadas cartesianas com relação à origem $(0, 0, 0)$.

Fonte: Autor.

Para entender melhor o significado físico da segunda lei de Newton vamos elaborar matematicamente uma lei de movimento baseada nas ideias de Aristóteles. Nós vivemos em um mundo dominado pela fricção. Se tentarmos mover uma cadeira na sala de aula precisamos aplicar uma força sobre a mesma. Quanto maior a força aplicada maior será a velocidade da cadeira, mas se pararmos de empurrá-la ela cessa o movimento rapidamente. De acordo com Aristóteles, um objeto só pode se mover enquanto existir uma força resultante diferente de zero aplicada sobre ele. Naturalmente, a direção do movimento será a mesma da aplicação da força. Logo, a lei de movimento de Aristóteles pode ser escrita matematicamente como,

$$\vec{F} = m\vec{v}, \quad (3.4)$$

em que \vec{F} é a força total aplicada e, de acordo com Aristóteles, a resposta à aplicação desta força seria o vetor velocidade \vec{v} . Com um pouco de reflexão não é difícil concluir que o fator de proporcionalidade, dado por m , é a massa do objeto, pois quanto maior m menor é a velocidade do objeto. A lei expressa pela eq.(3.4) parece fazer muito sentido para a maioria dos estudantes, pois é o que vemos no

caso da cadeira. Por que então a lei de newton, dada pela eq.(3.3), diz que a força é proporcional à aceleração do objeto e não à velocidade? Por que Aristóteles estava errado? Aristóteles, assim como a maioria de nós quando estamos iniciando nossos estudos sobre movimento, chegou a algumas conclusões erradas por não entender que o atrito, ou fricção, é uma força. Portanto, a força total aplicada na cadeira é aquela necessária para superar a força de atrito para colocar a cadeira em movimento e não necessariamente para produzir o movimento da mesma. E quando a força de atrito é insignificante, o que acontece?

O engano de Aristóteles fica evidente nesta situação. Se colocarmos a cadeira sobre uma pista de gelo, a cadeira continua a se mover em linha reta mesmo após cessarmos a aplicação da força sobre a mesma. Isso está em contradição com a lei dada pela eq.(3.4), pois para $F = 0$ deveríamos ter $v = 0$. Note como a equação matemática pode nos auxiliar na descrição do fenômeno. Por outro lado, se tivermos $F = 0$ na lei de Newton, eq.(3.3), a aceleração é igual a zero, o que significa que a velocidade do objeto não varia, mas o mesmo pode estar em movimento se $v \neq 0$. Ou seja, para existir movimento não é necessário que exista uma força aplicada no objeto o tempo todo.

Para prever o futuro do objeto em movimento através das leis de Aristóteles e de Newton vamos considerar que o “mundo” do objeto é composto por uma linha. Isso significa que estamos tratando o problema em uma única dimensão. Essa dimensão, ou linha, pode ser o eixo x , y ou z do nosso sistema de coordenadas. Vamos tratar o movimento no eixo x . Como nós não estamos considerando forças de atrito, podemos assumir que a cadeira ou o objeto em questão é uma partícula. A forma geométrica do objeto não importa nesta situação. Sendo a velocidade do objeto dada por $v = \Delta x / \Delta t$ e o tempo inicial $t_0 = 0$ podemos escrever a eq.(3.4) como,

$$F = m \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow x(t) = x_0 + \frac{F}{m}t, \quad (3.5)$$

em que x_0 é a posição da partícula no tempo inicial $t = t_0 = 0$. Essa equação nos diz que a posição da partícula em um tempo qualquer, $x(t)$, ou seu estado futuro, pode ser obtido se conhecermos sua posição inicial x_0 , a força total aplicada F e sua massa m . Em outras palavras, qualquer que seja a posição da partícula

no tempo t_0 , no próximo instante de tempo sua posição será deslocada de uma quantidade definida. No caso de uma força constante e positiva a partícula se moverá na direção positiva do eixo x por uma quantidade Ft/m . Note que, se a força aplicada for nula, teremos $x(t) = x_0$, e a partícula permanece em repouso, como discutido anteriormente.

Para obtenção da equação de movimento de Newton vamos considerar que a partícula possui uma aceleração constante dada por $a = \Delta v / \Delta t = (v - v_0) / t$. Isto significa que a partícula é acelerada a partir de sua velocidade inicial v_0 , em $t_0 = 0$, até a velocidade final v em um tempo total t , sem qualquer alteração de sua direção, veja Fig.3.2, de modo que,

$$v(t) = v_0 + at. \quad (3.6)$$

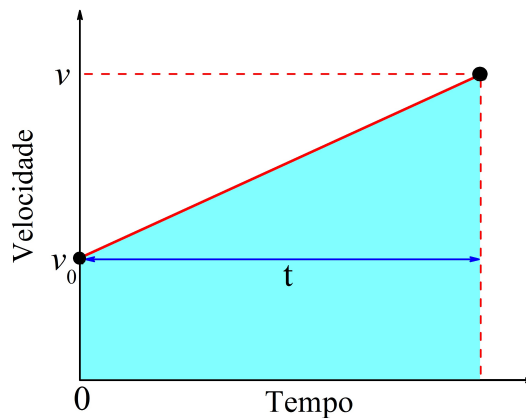


FIGURA 3.2: Gráfico da velocidade em função do tempo para uma partícula com aceleração constante a , dada pela inclinação da reta, ou seja, $a = [v(t) - v_0] / t$.

Fonte: Autor.

O deslocamento da partícula é dado por,

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v_0 + v(t)}{2} \Rightarrow x(t) = x_0 + \frac{[v_0 + v(t)]}{2}t, \quad (3.7)$$

pois $[v_0 + v(t)] / 2$ é a velocidade média da partícula no tempo total t . Combinando as equações (3.6) e (3.7) para eliminar $v(t)$ obtemos:

$$x(t) = x_0 + \frac{(v_0 + v_0 + at)}{2}t \Rightarrow x(t) = x_0 + v_0t + \frac{a}{2}t^2. \quad (3.8)$$

Utilizando a segunda lei de Newton, eq.(3.3), em que $a = F/m$, obtemos finalmente a equação que nos permite prever o futuro da partícula segundo esta lei,

ou seja,

$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{F}{2m}t^2. \quad (3.9)$$

Note que se a força resultante for nula ($F = 0$) neste caso, temos $x(t) = x_0 + v_0t$. Diferentemente da lei de movimento de Aristóteles, a eq.(3.9) nos diz que uma partícula se moverá em linha reta com velocidade constante $v_0 \neq 0$, mesmo quando $F = 0$. Este é o movimento retilíneo uniforme que mencionamos no início desta seção. Este resultado nos conduz à primeira lei de Newton que diz que, um corpo permanecerá em seu estado de repouso ou movimento retilíneo uniforme quando a força resultante aplicada no mesmo for nula. Estes resultados estão em perfeito acordo com o que observamos na prática para corpos macroscópicos, conferindo às leis de Newton do movimento total credibilidade para estes casos. Note como a matemática nos auxiliou nestas conclusões. Além de obtermos a equação de movimento do sistema, nós demonstramos matematicamente o erro de Aristóteles e conseguimos abstrair a primeira lei de Newton do resultado obtido quando consideramos $F = 0$.

Nas situações descritas acima foi possível obter as leis de movimento da partícula utilizando uma matemática simples e adequada para o ensino médio. E para o caso de sistemas em que a força aplicada não é nem constante e nem nula, seria possível proceder da mesma maneira para obtenção das leis de movimento? Se considerarmos o caso de um oscilador harmônico em uma dimensão, como o sistema massa-mola ilustrado na Fig.3.3, em que temos uma força variável dada pela lei de Hooke $F = -kx$, como podemos convencer os estudantes de que a lei de movimento deste sistema é dada por,

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi), \quad (3.10)$$

em que A é a amplitude do movimento, ω a frequência angular de oscilação e ϕ a fase inicial do movimento?

De fato não é nada trivial dizer para um estudante que um movimento pode ser descrito por uma função senoidal. Ainda mais se este tipo de função não for familiar aos alunos.

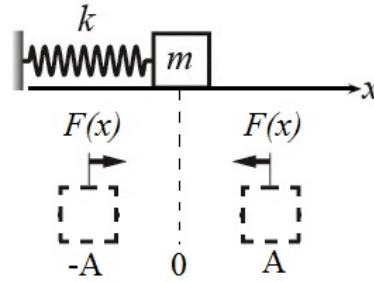


FIGURA 3.3: Sistema massa-mola descrito pela lei de Hooke $F(x) = -kx$, mostrando que quando a massa m se desloca de sua posição de equilíbrio estável ($x = 0$), a força restauradora $F(x)$ fornecida pela mola de constante elástica k faz com que a mesma retorne a $x = 0$. A constante A ou $-A$ descreve a amplitude do movimento.

Fonte: Autor.

Se os estudantes do ensino médio soubessem cálculo diferencial e integral e números complexos a resolução da equação diferencial $F = -kx$ seria imediata e não teríamos muitos problemas em tratar sistemas desse tipo. O aluno poderia proceder como segue.

Sendo $F = ma$ tem-se:

$$\begin{aligned} ma &= -kx, \\ \frac{d^2x(t)}{dt^2} &= -\frac{k}{m}x(t). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Logo, a equação diferencial do oscilador harmônico para oscilações livres é dada por [Moysés 2002],

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2x(t) = 0, \quad (3.12)$$

em que $\omega^2 = k/m$. Se um número complexo z é escrito como uma função do tempo t , $z(t) = x(t) + iy(t)$, sendo $i = \sqrt{-1}$ por definição, podemos obter a solução da eq.(3.12). Esta é dada pela parte real de z , ou seja, $Re\{z(t)\} = x(t)$.

Considerando uma solução da forma $z(t) = Ce^{pt}$, sendo C e p constantes que podem ser complexas, a operação de derivação com relação a t pode ser substituída pela multiplicação por p , ou seja, $d/dt \longleftrightarrow p$, de modo que a equação diferencial (3.12) pode ser reduzida a uma equação algébrica dada por,

$$p^2 + \omega^2 = 0. \quad (3.13)$$

Esta é chamada de equação característica, cuja solução neste caso é $p = \pm i\omega$. Podemos escolher qualquer uma das duas raízes. Escolhendo a raiz positiva e

escrevendo a constante C na forma trigonométrica $C = Ae^{i\phi}$, temos que $z(t) = Ae^{i(\omega t + \phi)}$. Utilizando a forma de Euler $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, obtemos:

$$z(t) = Ae^{i(\omega t + \phi)} = A[\cos(\omega t + \phi) + i\sin(\omega t + \phi)]. \quad (3.14)$$

Como a função incógnita que estamos procurando é dada por $x(t) = \text{Re}\{z(t)\}$, a solução da equação diferencial do oscilador harmônico (3.12) tem a forma

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi), \quad (3.15)$$

como descrito na eq.(3.9). Poderíamos ir além e mostrar que a velocidade e a aceleração do oscilador harmônico são dadas, respectivamente, por $v(t) = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$ e $a(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$. Para isto bastaria derivar a eq.(3.15). Note a infinidade de conceitos matemáticos que precisariam ser trabalhados para a obtenção da lei de movimento de um sistema um pouco mais complexo, em que consideramos uma força variável com forma linear. Qualquer professor do ensino médio irá dizer que obter a eq.(3.15) é completamente inviável para alunos do ensino médio, pois a maioria destes possui um ferramental matemático limitado.

Vamos demonstrar agora como a matemática pode auxiliar o ensino de física mesmo nesta situação em que a princípio, seria inconcebível no nível de ensino em questão. Para isso utilizaremos conceitos familiares para os alunos do ensino médio, como geometria, movimento retilíneo e circular uniformes e projeção de vetores.

Para obtenção da equação de movimento do oscilador harmônico tentaremos visualizar este tipo de movimento como projeção de outro tipo de movimento que conhecemos e conseguimos equacionar facilmente. Se considerarmos um objeto em movimento circular uniforme (MCU) em uma trajetória circular de raio R , como ilustrado na Fig.3.4(a), temos que a sombra ou a projeção do objeto no eixo x realiza o mesmo movimento que uma massa presa a uma mola. Ou seja, este realiza um movimento de vai e vem periódico com um deslocamento máximo, ou amplitude, dado por R . Antes da obtenção da lei de movimento da projeção da partícula, que executa um movimento harmônico simples (MHS), vamos obter a equação de movimento da partícula na trajetória circular.

Vamos considerar que a trajetória circular é dada por s . Se a partícula completar uma volta na circunferência, ela terá percorrido a distância do comprimento da circunferência do mesmo, ou seja, $s = 2\pi R$. O fator 2π é o ângulo total, dado por 360° , contido na circunferência de raio R . Naturalmente, se a partícula percorrer apenas um arco da trajetória circular teremos $s = \theta R$. Note que para a circunferência completa $\theta = 2\pi$. Para obter a equação de movimento deste sistema vamos recorrer ao que nós já sabemos sobre o movimento retilíneo uniforme (MRU).

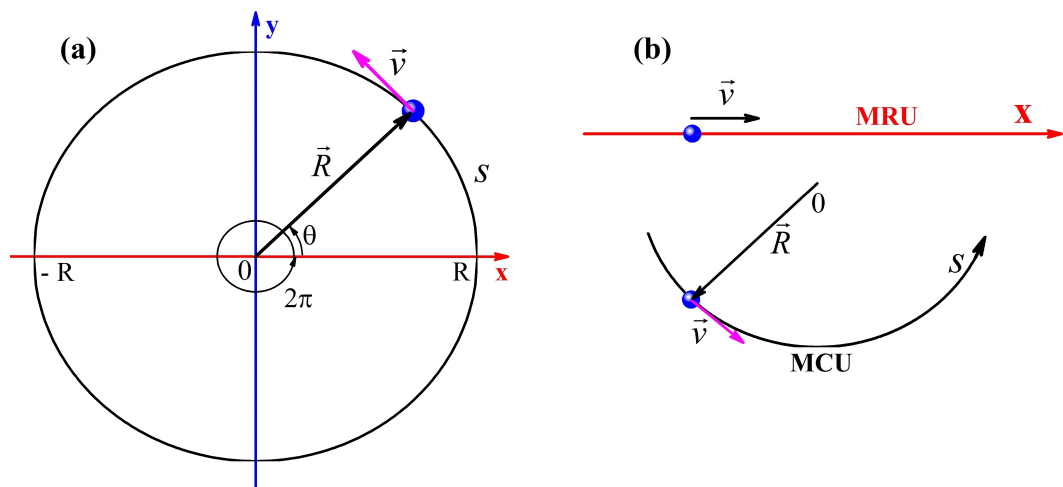


FIGURA 3.4: (a) Partícula em movimento circular uniforme com velocidade \vec{v} , mostrando a trajetória circular s de raio R e ângulo θ . (b) Se curvamos a trajetória retilínea dada pelo eixo x no MRU obtemos a trajetória circular s do MCU. Em ambos os casos temos um grau de liberdade.

Fonte: Autor.

Estes dois movimentos tem muito em comum e podem ser descritos basicamente pela mesma equação. Ambos os movimentos são uniformes. Isso significa que a magnitude da velocidade de ambos os sistemas é constante. Observe que falamos sobre a magnitude da velocidade, pois como já discutido, a velocidade é um vetor e no caso circular ela muda sua direção o tempo todo porque existe uma força centrípeta mantendo a partícula em uma trajetória circular. Já no caso retilíneo tanto a magnitude quanto a direção da velocidade são constantes.

Para aproveitar a equação do movimento retilíneo uniforme para descrever o movimento circular uniforme precisamos recorrer ao que chamamos na física de grau de liberdade. Isto se refere à liberdade de movimento de um sistema

físico, ou seja, é a variável de movimento do sistema. No caso do MRU em uma dimensão, vimos que o “mundo” da partícula é uma linha dada pelo eixo x . Logo, a partícula só pode se mover para frente e para trás em x . Portanto, este sistema possui um único grau de liberdade que é dado por x . No caso do MCU a maioria dos alunos respondem que o sistema possui dois graus de liberdade, porque o movimento se dá em um plano, no nosso caso xy . Neste caso temos um sistema bidimensional. Mas observe que a partícula ainda está confinada a se mover em uma linha, dada pela trajetória s , pois o raio da trajetória circular não varia. Ou seja, apesar deste ser descrito em duas dimensões, continuamos com um sistema de um grau de liberdade, dado pelo ângulo θ ou por s , pois ambos estão relacionados por $s = \theta R$. É interessante notar que se a trajetória retilínea dada pelo eixo x no MRU for curvada, teremos automaticamente a trajetória s do MCU, como mostra a Fig.3.4(b).

Dessa forma podemos utilizar a equação do MRU dada por $s(t) = s_0 + vt$, obtida da eq.(3.9) quando $F = 0$ e trocando x por s , para obtenção da equação do MCU. Utilizando a relação $s = \theta R$ e como R não varia com o tempo obtemos:

$$\theta(t) = \frac{s(t)}{R} \implies \theta(t) = \frac{s_0}{R} + \frac{v}{R}t. \quad (3.16)$$

Note que a expressão acima nos permite descrever como o ângulo θ varia no tempo. Ainda utilizando a relação entre s e θ , podemos identificar s_0/R como a posição angular inicial θ_0 da partícula na trajetória circular. Mas ainda falta identificar a razão v/R . Se fizermos a variação de s no tempo e lembrando que a velocidade linear da partícula é dada por $\Delta s/\Delta t$ e o raio R da trajetória circular é constante tem-se,

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta(R\theta)}{\Delta t} = R \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \implies v = R\omega. \quad (3.17)$$

O parâmetro $\omega = \Delta\theta/\Delta t$ é a velocidade angular da partícula a qual é dada em rad/s , ou seja, ela nos fornece a taxa com que a posição angular θ da partícula varia no tempo. Neste caso ela é constante, porque estamos trabalhando com movimento uniforme. Logo, a equação que descreve o movimento da partícula na trajetória circular é dada por:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t. \quad (3.18)$$

Note a semelhança da eq.(3.18) para o MCU com a equação do MRU. O que nós temos é uma conversão de variáveis dinâmicas lineares para variáveis dinâmicas angulares, ou seja, $s \rightarrow \theta$ e $v \rightarrow \omega$. O mesmo procedimento pode ser realizado para obtenção da aceleração angular.

Agora que sabemos a equação que rege o movimento da partícula na trajetória circular, podemos analisar sua projeção para obtermos a equação de movimento do oscilador harmônico.

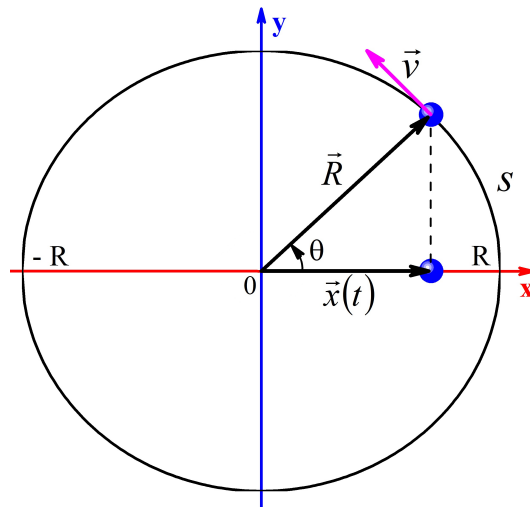


FIGURA 3.5: Partícula em movimento circular uniforme com velocidade \vec{v} , mostrando a projeção do vetor \vec{R} no eixo x , dada por $\vec{x}(t) = R\cos[\theta(t)](\hat{i})$, para obtenção da equação de movimento do oscilador harmônico.

Fonte: Autor.

Projetando a posição da partícula no eixo x , dada pelo vetor \vec{R} , veja Fig.3.5, temos que

$$\vec{x}(t) = R\cos[\theta(t)](\hat{i}). \quad (3.19)$$

Note que apareceu uma novidade na expressão acima, dada pelo versor \hat{i} . Um versor é um vetor de magnitude unitária que indica a direção e o sentido do vetor que está sendo tratado. No nosso caso, o versor \hat{i} indica a direção e o sentido de \vec{x} . Quando um aluno pergunta para o outro onde fica a cantina da escola por exemplo, o outro aluno apenas aponta o dedo em direção ao local desejado. Este aluno está fornecendo o versor do deslocamento entre eles e a cantina, pois ele está indicando apenas a direção e o sentido que o colega que perguntou precisa seguir. Portanto, o versor \hat{i} está indicando que a projeção do vetor \vec{R} no eixo x ,

a qual descrevemos por \vec{x} , aponta para o sentido positivo de x , como mostrado na Fig.3.5. Substituindo $\theta(t)$ dado pela eq.(3.18) em (3.19), obtemos:

$$x(t) = R\cos(\omega t + \theta_0). \quad (3.20)$$

Se trocarmos as letras que descrevem a amplitude R do movimento e a fase inicial θ_0 por A e ϕ , respectivamente, obtemos a mesma expressão dada pela eq.(3.15), a qual descreve a equação de movimento do oscilador harmônico. Note que não foi preciso resolvermos a equação diferencial dada por $F = -kx$ através de números complexos ou qualquer outro método. Utilizamos apenas conceitos matemáticos básicos e acessíveis a qualquer aluno do ensino médio.

No produto educacional proveniente desta dissertação (ver apêndice) são apresentados maiores detalhes de outros exemplos de aplicação das leis de Newton, como a obtenção de equações particulares de diversas situações físicas de um fenômeno a partir de uma equação geral, além de todo o desenvolvimento para a obtenção da posição, da velocidade e da aceleração do oscilador harmônico a partir do MCU utilizando uma matemática simples e adequada para o ensino médio, juntamente com descrições gráficas dos fenômenos.

3.3 Referencial Teórico

Dentre as teorias de aprendizagem que conhecemos, a que mais se adequou ao nosso trabalho e forma de pensar foi a teoria de Bruner. Esta afirma que é possível ensinar qualquer assunto para qualquer aluno em qualquer estágio do desenvolvimento, desde que a abordagem do assunto seja adequada para o estágio de desenvolvimento do aluno [Bruner 1973]. Aqui nós estamos utilizando uma matemática acessível aos alunos do ensino médio para tornar a física mais atraente visando um melhor aprendizado e interesse pelas ciências.

A ideia de utilizar os movimentos retilíneo e circular uniformes, os quais são representações mais simples e fáceis de equacionar, para introduzir formas mais complexas de movimento, como a obtenção de equações particulares de um fenômeno em diferentes condições a partir de uma equação geral, ou a obtenção

do movimento harmônico simples, vai de encontro com o currículo espiral de Bruner. Pois, o aluno está vendo os mesmos tópicos da física, particularmente da mecânica clássica, através de diferentes representações matemáticas em diferentes níveis de profundidade. Isso significa que o aluno utiliza o que já aprendeu, através da compreensão das informações iniciais fornecidas, para executar tarefas mais complexas à medida que o mesmo se desenvolve. Portanto, nosso objetivo é fazer com que o aluno tenha condições de construir uma estrutura cognitiva através da elaboração de hipóteses e tomada de decisões para a solução de problemas.

Capítulo 4

Descrição da Metodologia e Aplicação do Produto

Nossa proposta foi aplicada em uma escola da rede particular da cidade de Bragança Paulista, estado de São Paulo, em uma sala do terceiro ano do ensino médio contendo 35 alunos.

Quanto à estrutura da escola, esta possui apenas laboratório de química. Se o professor de física desejar fazer alguma experimentação terá que levar o seu próprio equipamento para a sala de aula. As salas de aula são arejadas com pisos de granito e possuem computadores com conexão com a internet e projetores.

Não tivemos nenhum problema para aplicar nossa proposta de mestrado na escola. O coordenador deu respaldo para que o trabalho fosse desenvolvido sempre que possível, desde que o conteúdo da apostila fosse cumprido até a data do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Em um sistema apostilado o professor trabalha independentemente de outros professores, mesmo que sejam da mesma disciplina. A sala em que a proposta foi aplicada tinha três professores de física. Naquele momento ficamos responsáveis pelo conteúdo de mecânica (frente 1) enquanto que os outros dois professores lecionavam sobre termologia e eletricidade (frente 2) e ótica e ondulatória (frente 3). Estes provavelmente nem ficaram sabendo da aplicação desta proposta, pois era difícil encontrá-los devido os horários das respectivas aulas serem em dias diferentes. Ou seja, nenhum

contato foi estabelecido durante semanas.

A preparação para o vestibular é o foco principal do material didático da escola em que a proposta foi aplicada. Eram realizados simulados mensais para treinar os alunos para as provas. Infelizmente nossa proposta não pode ser uma prioridade nas aulas lecionadas e portanto, teve que ser aplicada de acordo com a disponibilidade do calendário escolar.

Dividimos a proposta em 5 atividades realizadas no segundo semestre de 2015, as quais foram aplicadas entre os dias 03/09 à 12/11/2015 seguindo as etapas apresentadas no nosso produto educacional, ver apêndice. Estas são apresentadas de maneira sucinta a seguir.

4.1 Atividade 1: A matemática como objeto auxiliador de nossa intuição

A primeira atividade foi sobre a necessidade de desenvolvermos o feramental matemático para auxiliar nossa intuição sobre o que observamos ou quando estamos diante de um problema de difícil análise ou execução. Mostramos para os alunos a importância e a necessidade de confirmarmos formalmente ideias intuitivas através do experimento envolvendo um barbante e uma moeda, seção A.2 do apêndice. A atividade foi introduzida da seguinte forma:

“Considere uma moeda de raio r_m envolvida por um barbante de forma bem ajustada. Se aumentarmos o comprimento do barbante, dado pelo comprimento da circunferência da moeda ($2\pi r_m$) em 10 cm, e envolvermos novamente a moeda teremos uma nova circunferência de raio R_m formada pelo barbante, como ilustrado na Fig.4.1. Imagine que pudéssemos realizar o mesmo experimento envolvendo um barbante em torno do planeta Terra, considerando-o circular de raio r_T , e acrescentando os mesmos 10 cm ao comprimento do barbante dado pelo comprimento da circunferência da Terra ($2\pi r_T$). Você acha que a folga entre a moeda e o barbante ($R_m - r_m$) será maior, menor ou igual à folga entre o planeta Terra e o barbante dada por $R_T - r_T$? Explique o seu raciocínio.”

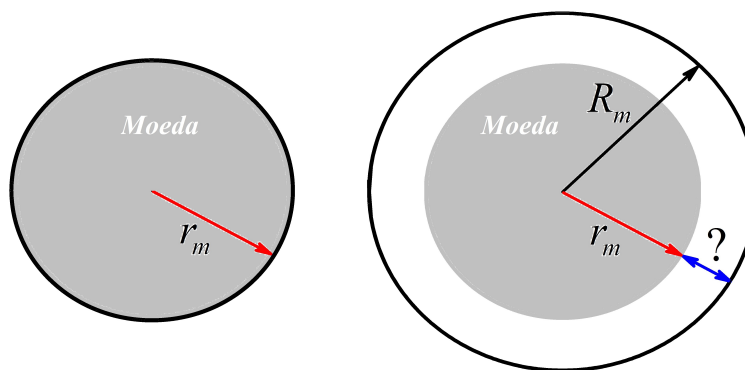


FIGURA 4.1: À esquerda ilustramos uma moeda de raio r_m envolvida por um barbante de forma bem ajustada e à direita mostramos a nova circunferência de raio R_m formada pelo barbante após acrescentarmos 10 cm em seu comprimento. O ponto de interrogação é a folga $R_m - r_m$ que os alunos precisaram discutir se era maior, menor ou igual à folga entre o barbante e o planeta Terra nas mesmas condições.

Fonte: Autor.

Nesta parte da atividade o foco da discussão era fornecer hipóteses e argumentos preliminares, sem qualquer equacionamento, sobre se a folga entre a moeda e o barbante era maior, menor ou igual a folga entre o planeta Terra e o barbante nas mesmas condições. A turma em questão ficou dividida e participou ativamente das discussões. Alguns alunos defenderam que a folga entre o barbante e a Terra seria igual, com o argumento de que como o aumento no comprimento do barbante foi o mesmo, a folga também seria, enquanto que outros defenderam que a folga seria menor, já que a Terra é bem maior do que a moeda.

Nesta atividade utilizamos uma moeda e um cesto de lixo cilíndrico que estava na sala, para que os alunos pudessem realizar experimentos para trabalhar suas hipóteses com relação ao planeta Terra. Após a realização dos experimentos todos notaram que a folga entre o barbante e a moeda e entre o barbante e o cesto de lixo eram as mesmas, causando certo alvoroço no grupo que defendia essa ideia, que comemoraram a comprovação experimental de suas hipóteses. Por outro lado, alguns alunos que defendiam que a folga seria menor levantaram a possibilidade de o experimento com a moeda e o cesto estar errado, uma vez que foi realizado com um objeto com dimensões bem diferentes do planeta Terra. Isso permitiu ao professor discutir a eficiência e precisão do experimento realizado com a turma. Em certo ponto da discussão, um aluno se levantou e comentou

que, “se a intuição e a experiência estiverem erradas, a gente vai ficar discutindo a manhã toda sem resolver nada”. E foi a partir desse comentário que alguns alunos disseram “que era necessário fazer a conta pra comprovar”. Foi curioso observar que a comprovação matemática do problema passou a ser a única fonte confiável para a turma, que tentou encontrar a solução com muito empenho para chegar a uma resposta correta e indiscutível.

Muitos alunos tentaram comparar a Terra com a moeda, obtendo algumas respostas equivocadas. Por exemplo, alguns encontraram que o raio da moeda era igual ao raio da Terra da seguinte forma,

$$\begin{aligned} C_{Terra} &= C_{moeda} \\ 2\pi r_T + 10 &= 2\pi r_m + 10 \\ \therefore r_T &= r_m. \end{aligned}$$

Alguns até raciocinaram corretamente, comparando a Terra antes e depois de acrescentar os 10 cm ao comprimento da circunferência, mas cometeram erros matemáticos como,

$$\begin{aligned} 2\pi(r_T + 10) - 2\pi r_T &= f \\ (r_T + 10) - r_T &= f \\ r_T + 10 - r_T &= f \\ f &= 10cm. \end{aligned}$$

Outros conseguiram chegar corretamente à conclusão de que as folgas seriam iguais, com destaque para a resposta de um aluno que apresentou um raciocínio direto e simples,

$$\begin{aligned} C_{folga} &= 2\pi R_{folga} \\ 10 &= 2\pi R_{folga} \\ R_{folga} &= \frac{10}{2\pi}cm. \end{aligned}$$

Ao ser questionado sobre sua resolução, o aluno respondeu com certa timidez, talvez com receio de ter respondido equivocadamente a questão. “Professor, se a folga aumenta 10 cm, esse é o comprimento dela. Aí eu pus na fórmula e achei

o raio da folga.” Nota-se um pouco de confusão em sua resposta, pois o que aumenta é o comprimento da circunferência e não a folga. Mas ele quis dizer que uma folga de 10 cm é criada no comprimento inicial da circunferência e isso está perfeitamente correto.

A comprovação matemática convenceu a todos que a folga seria a mesma tanto para a moeda quanto para a Terra, pois o resultado é independente do raio do objeto envolvido pelo barbante. Isso permitiu aos alunos pensarem sobre a pergunta seguinte, em que era questionado se as folgas continuariam iguais se o aumento do comprimento fosse diferente de 10 cm. Tivemos como resultado respostas plausíveis, tais como *“continuariam iguais, pois não dependem do raio”* e *“não mudariam, assim como os 10 cm não mudaram, nenhuma outra medida faria a folga ser diferente entre ambos”*.

No encerramento da atividade, a relevância da matemática como ferramenta auxiliadora da física foi discutida entre a turma que, sem exceção, admitiu que a matemática é fundamental para a explicação de fenômenos físicos. A confiança nas respostas mostrou que a atividade foi executada e assimilada de forma satisfatória, com algumas merecendo destaque, tais como *“a física é constituída pela parte teórica e pela parte matemática e sendo assim a física é dependente da matemática e da parte teórica, não conseguindo existir sem uma das duas partes, pois o cálculo serve para comprovar as teorias da física”*. Alguns foram mais sucintos, escrevendo que *“a matemática é a prova concreta do que realmente é a verdade na física”*, *“a matemática é importante na física para comprovar teorias”* ou ainda que *“ela traz a exatidão aos experimentos físicos”*.

4.2 Atividade 2: A importância das funções na ciência

Na atividade 2 nós discutimos a importância das funções na ciência juntamente com o conceito de vetores, versores e suas propriedades e sistemas de coordenadas, seções A.4 e A.5 do apêndice.

Após uma breve revisão sobre funções nós fizemos algumas questões como: *O que esse tipo de relação, dada por funções, tem a ver com ciências? Por que é tão importante utilizarmos funções para estudar ciências?* As respostas foram variadas tais como, *“Pois assim como nas funções, a ciência também tem termos que dependem de outros termos variáveis”* e *“Esse tipo de relação pode trazer para o papel aquilo que o mundo natural, diariamente, faz diante de nossos olhos”*.

O comentário de um aluno sobre esse assunto, ao dizer que, nas palavras dele, *“as funções são importante porque a gente consegue enxergar melhor o que está acontecendo quando se monta o gráfico”*, foi útil para o professor introduzir os conceitos de sistemas de coordenadas. Após algumas discussões o professor mostrou para os alunos uma ilustração em duas dimensões do sistema de coordenadas cartesianas, dados por x e y , e o sistema de coordenadas polares descrito por um raio R e um ângulo θ , como mostrado na Fig.4.2.

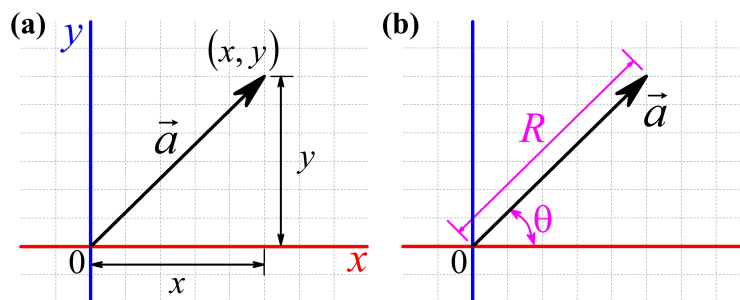


FIGURA 4.2: **(a)** Sistema de coordenadas cartesianas em que um vetor \vec{a} é descrito em duas dimensões pelas coordenadas x e y . Também foi discutido a possibilidade de uma terceira dimensão dada pelo eixo z . **(b)** Sistema de coordenadas polares em que \vec{a} é descrito por um raio R e um ângulo θ .

Fonte: Autor.

Alguns questionamentos foram feitos, tais como se eles já conheciam tais sistemas de coordenadas e por que eram diferentes. Obtivemos respostas interessantes como, *“Um é o sistema cartesiano, com coordenadas x , y e z . O outro é o de coordenadas polares, analisando através de um raio e um ângulo de uma circunferência”*, *“Coordenadas cartesianas e polares, existem vários tipos para oferecer diversidade e praticidade no cálculo”* e *“O primeiro é o cartesiano e o segundo é o sistema polar. Porque cada sistema é mais conveniente a alguma*

parte das ciências". Cabe ressaltar que o sistema de coordenadas polares não faz parte do conteúdo programático do material do ensino médio, o que obrigou o professor a dar uma explanação mais detalhada sobre o assunto.

O conceito de versor já era conhecido pelos alunos. Eles forneceram algumas definições para versores como, "*são partes menores que um vetor*", "*vetor unitário de mesma direção e sentido*", "*é um vetor com unidade 1*" e "*através de um versor constrói-se um vetor*". Partindo para as operações vetoriais, a turma demonstrou facilidade ao se deparar com a questão que pedia para se determinar a magnitude do vetor resultante \vec{a} dada por $|\vec{a}| = 3|\vec{m}|$, sendo que o vetor \vec{m} era dado por $\vec{m} = (3, 4)$. Eles fizeram a decomposição de \vec{m} e rapidamente observaram o triângulo pitagórico para obtenção da magnitude do mesmo dada por $|\vec{m}| = 5$. A maioria simplesmente apresentou como resposta o produto $5 \times 3 = 15$, mostrando que este cálculo era trivial.

Os alunos se mostravam interessados nas atividades realizadas em sala de aula, se concentrando e discutindo as resoluções com os colegas de turma. Infelizmente isso não era observado quando o professor passava atividades para serem realizadas em casa. Uma delas foi a determinação da distância entre dois pontos arbitrários da cidade utilizando um mapa virtual ou impresso. Eles deveriam utilizar os conceitos de versores, distância entre dois pontos e escala de referência fornecida no mapa para obtenção da direção, do sentido e do módulo do deslocamento entre esses dois pontos, considerando de preferência, a origem do sistema de coordenadas como sendo a casa deles. Um número pequeno de alunos realizou esta atividade e os resultados foram, de forma geral, como os apresentados na Fig.4.3. Como estas tarefas eram realizadas sem a supervisão do professor, era muito comum que os resultados fossem apresentados de maneira incompleta. A justificativa daqueles que não realizavam as tarefas era sempre a mesma. Eles diziam que as avaliações se aproximavam e que precisavam estudar. Os estudantes geralmente estudam porque precisam, como uma moeda de troca, a maioria deles não vê os estudos como algo benéfico e engrandecedor para eles no futuro.

Ao voltar ao ambiente escolar reiniciamos o assunto de sistemas de co-

ordenadas perguntando se a Física (resultados) de um fenômeno descrito em um sistema de coordenadas cartesianas era diferente da Física do mesmo em um sistema de coordenadas polares.

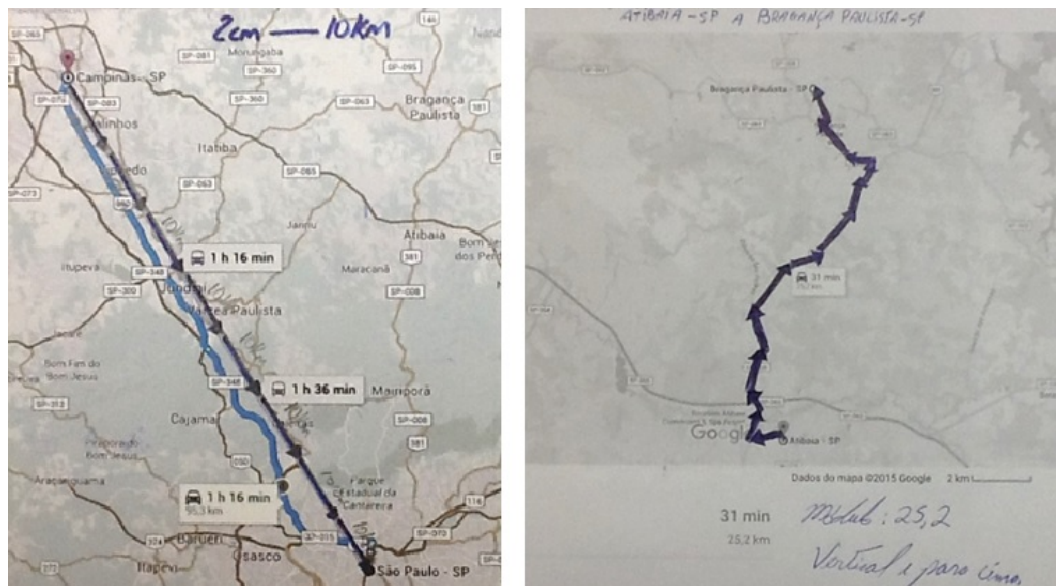


FIGURA 4.3: Representação da distância entre dois pontos arbitrários da cidade em que os alunos moram utilizando mapas para obtenção da direção, do sentido e do módulo do deslocamento entre esses dois pontos.

Fonte: Autor e alunos.

Obtivemos respostas coerentes tais como, “*Não, os resultados em ambos os casos são os mesmos porém por serem feitos de diferentes jeitos, o mesmo resultado apresenta forma escrita diferente*” e “*Não, porque são mecanismos diferentes para a resolução de um problema que no final terá o mesmo resultado. São apenas caminhos diferentes*”. Porém, a maioria da turma apresentou equivocadamente como resposta que a física seria diferente. De maneira geral eles responderam que, “*Sim, pois um é cartesiano e outro polar*”.

4.3 Atividade 3: Aplicações da segunda lei de Newton

O objetivo desta atividade foi fazer com que os alunos aplicassem os conceitos aprendidos nas atividades 1 e 2 durante a resolução de problemas em

que era necessário utilizar a segunda lei de Newton. Eles tinham que resolver matematicamente o que se pedia e abstrair informações físicas do resultado, veja seções A.3 e A.5 do apêndice.

Após a contextualização sobre a segunda lei de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, os alunos tiveram que resolver alguns exercícios para obtenção da força resultante aplicada no sistema, como o apresentado na Fig.4.4. Neste os alunos tinham que obter o valor da magnitude da força resultante e sua direção. Em seguida eles deveriam imaginar que dois colegas estavam puxando uma carteira nas mesmas condições da Fig.4.4, e como eles poderiam otimizar o deslocamento da carteira.

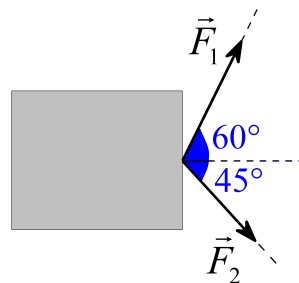


FIGURA 4.4: Representação de duas forças sendo aplicadas em uma caixa em direções diferentes, com $|\vec{F}_1| = 200N$ fazendo um ângulo de 60° com uma linha horizontal que separa as duas forças, enquanto que $|\vec{F}_2| = 120N$ é aplicada numa direção de 45° com a mesma linha. Fonte: Autor.

Muitos alunos deixaram em branco essa questão, enquanto que outros desistiram pois a questão apresentava números decimais. Como o colégio não permite a utilização de máquinas calculadoras eles não puderam chegar na resposta final. Outros até tentaram utilizar a lei dos cossenos, mas não conseguiram pois tinham que desenvolver a lei para $\cos(105^\circ)$. Alguns alunos simplesmente apresentaram como resposta a adição das forças $200 + 120 = 320N$. Nota-se que à medida que tornamos a atividade um pouco mais complexa, do ponto de vista matemático, os alunos simplesmente a abandonam e não fazem muita questão de finalizar a mesma.

Outro exercício foi elaborado para verificar se os alunos entendiam o significado físico da equação vetorial dada pela segunda lei de Newton. Eles tiveram que analisar a força resultante que agia em uma bicicleta em movimento retilíneo uniforme (MRU). Observamos muitos enganos semelhantes às ideias de

Aristóteles para o movimento, veja seção A.5 do apêndice, tais como “*a força não é zero, porque a bicicleta não está parada*” ou “*Existe força resultante, porque ela tem velocidade*”. Outros responderam analisando a relação matemática entre força e aceleração dada pela segunda lei, afirmando que a “*força resultante é zero, pois todos os vetores se anulam*”, “*Fr=0, pelo fato de ser uma velocidade constante*” e “*Fr=0, porque não há variação de velocidade, nem direção nem sentido, portanto não há aceleração*”. Na sequência, os alunos tiveram que discutir o problema utilizando a lei da Inércia como justificativa, proporcionando afirmações como “*um corpo que está em movimento uniforme tende a ficar neste mesmo movimento*”, “*pois com o vetor força resultante tendo módulo nulo, não há nada que interfere no sistema, sendo assim, o movimento se conserva*” e “*inércia é quando o corpo tende a continuar em repouso ou MRU se já estiver acontecendo um desses casos. Como a bicicleta está em MRU, ela tende a continuar em MRU pois ‘não há forças’ interferindo*”.

Pelas respostas observamos que as deficiências conceituais e técnicas (operacionais) dos alunos do terceiro ano são semelhantes à de alunos que estão iniciando seus estudos sobre MRU e segunda lei de Newton. Ou seja, nota-se que não houve aprendizado sobre os conceitos tratados mesmo para estes alunos que tem trabalhado constantemente há mais de dois anos nestes temas com o objetivo de passar no vestibular. Qual será o problema? O método apostilado conteudista? A falta de interdisciplinaridade entre a matemática e a física na descrição dos conteúdos? O simples desinteresse dos alunos pelo assunto? São muitas variáveis, o que torna o trabalho de diagnosticar as deficiências para propor uma solução ainda mais difícil.

Continuando com os exercícios, resolvemos aplicar um, comumente utilizado em todos os livros e apostilas didáticas para trabalhar a decomposição de forças com os alunos, o plano inclinado. Mas na nossa atividade nós fornecemos uma contextualização mais real para o problema, considerando um trenó descendo uma rampa de gelo, com inclinação θ , sem atrito.

Nós discutimos sobre a melhor escolha para colocar os eixos coordenados para a decomposição da força peso. A escolha foi colocar o eixo x paralelo ao

deslocamento do trenó, mas com o trenó se deslocando no sentido negativo de x , como mostra a Fig.4.5. Apesar da representação da decomposição de forças e a parte de geometria que trata da localização do ângulo θ nas proximidades do vetor força peso não terem sido problema, nota-se que ainda existem grandes dificuldades para os alunos trabalharem com operação de vetores. Quando eles tiveram que encontrar a força resultante nas direções x e y , foi muito comum encontrarmos operações do tipo “ $\vec{F}_{Ry} = \vec{N} - \vec{P}_y$ ”. Ou seja, eles ainda não entendiam, ou pelo menos não sabiam equacionar, que a força resultante em uma determinada direção é a soma vetorial de todas as forças aplicadas no corpo naquela direção. No caso do trenó, como a resultante em y é nula, a maioria deles continuaram a operação de forma incorreta da seguinte forma,

$$\begin{aligned}\vec{F}_{Ry} &= \vec{N} - \vec{P}_y \\ 0 &= \vec{N} - \vec{P}_y \\ \therefore N &= P_y.\end{aligned}$$

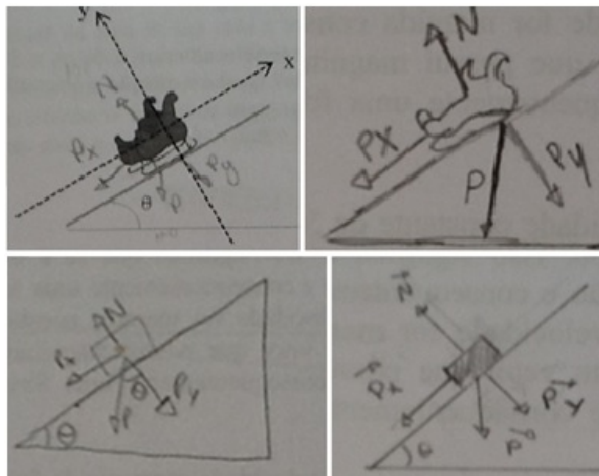


FIGURA 4.5: Representação dos eixos coordenados x e y para o sistema composto por um trenó deslizando numa pista de gelo inclinada por um ângulo θ . Note as decomposições do vetor força peso \vec{P} em suas componentes \vec{P}_x e \vec{P}_y realizadas pelos alunos.

Fonte: Autor e alunos.

Eles simplesmente chegavam na resposta desejada porque sabiam qual era e portanto manipulavam a operação. A insistência na discussão sobre versores auxiliou bastante a melhorar operações vetoriais como estas, pois ficou mais

evidente o surgimento dos sinais nas forças, pois

$$\begin{aligned}\vec{F}_{Ry} &= \vec{N} + \vec{P}_y \\ 0 &= N(\hat{j}) + P_y(-\hat{j}) \\ 0 &= N - P_y \\ \therefore N &= P_y.\end{aligned}$$

4.4 Atividade 4: Abstraindo informações sobre o fenômeno físico a partir de sua modelagem matemática

Nesta atividade nós seguimos a ideia apresentada na seção A.3 do apêndice, abstraindo informações sobre os fenômenos em estudo a partir de sua modelagem matemática. Para isso nós exploramos principalmente os movimentos retilíneo uniforme (MRU) e circular uniforme (MCU).

Utilizamos diversos exemplos de situações cotidianas dos alunos, como o apresentado na Fig.4.6, para tornar a análise dos fenômenos a partir dos resultados matemáticos mais fáceis. Na Fig.4.6(a) é apresentada a reação normal \vec{N}_1 de uma superfície curva, com raio de curvatura R , em um veículo de peso mg se movendo com uma velocidade \vec{v} , como se o motorista estivesse passando no ponto mais alto de um morro. A contextualização também poderia ser um aluno em uma bicicleta passando por uma lombada. Na Fig.4.6(b) temos o mesmo veículo passando agora pelo ponto mais baixo de um declive com o mesmo raio de curvatura e reação normal da superfície dada por \vec{N}_2 .

O ponto de partida para essa atividade foi o exemplo de um veículo executando um MRU, ou seja, velocidade constante \vec{v} e resultante nula, em uma superfície plana. Neste caso foi fácil mostrar que a reação normal da superfície é igual à força peso do veículo, ou seja, $N = mg$. Em seguida perguntamos: E no caso de uma superfície curva, como na Fig.4.6, como devemos proceder? Note que estamos introduzindo uma forma um pouco mais complexa de movimento

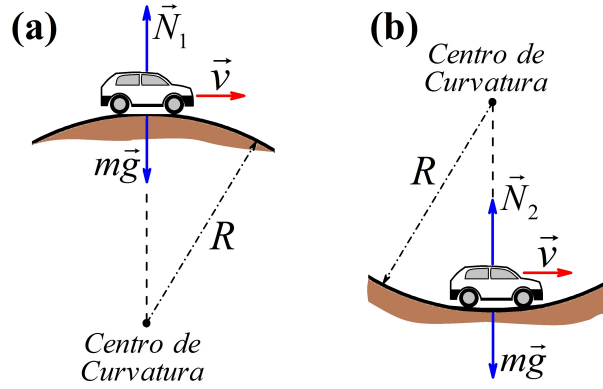


FIGURA 4.6: (a) Veículo com velocidade \vec{v} se movendo em uma superfície com raio de curvatura R e (b) ilustramos o mesmo veículo passando por um declive com mesmo raio de curvatura. São apresentadas a reação normal da superfície \vec{N}_1 e \vec{N}_2 , para (a) e (b), respectivamente, e a força peso $m\vec{g}$.

Fonte: Autor.

contextualizada por uma forma de movimento mais simples que eles já conhecem, no caso o MRU.

Neste exemplo não foi necessário considerarmos que o movimento circular executado pelo veículo era uniforme, pois nós abordamos apenas o movimento no ponto mais alto da trajetória, em (a), e mais baixo, em (b). Como o movimento é circular a resultante agora é a força centrípeta $F = mv^2/R$. Considerando os eixos coordenados x e y na direção da velocidade e da normal, respectivamente, temos pela segunda lei de Newton para a Fig.4.6(a) que,

$$\begin{aligned} \vec{F}_{Ry} &= \vec{N}_1 + m\vec{g} \\ m\frac{v^2}{R}(-\hat{j}) &= N_1(\hat{j}) + mg(-\hat{j}) \\ N_1 &= mg - m\frac{v^2}{R}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Analisando o resultado matemático obtido, observamos que nesta situação a reação normal da superfície é menor que a força peso, diferentemente do resultado obtido para o veículo se movendo em uma superfície plana, em que $N = mg$. Os alunos foram questionados se este resultado fazia sentido.

E no caso da Fig.4.6(b) o que temos? Utilizando o mesmo procedimento

obtemos,

$$\begin{aligned}\vec{F}_{Ry} &= \vec{N}_2 + m\vec{g} \\ m\frac{v^2}{R}(\hat{j}) &= N_2(\hat{j}) + mg(-\hat{j}) \\ N_2 &= mg + m\frac{v^2}{R}.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Obsevamos agora que a força normal é maior que a força peso por um fator dado pela resultante centrípeta. Note que nesta situação o sinal da força centrípeta é positivo, pois esta aponta na direção positiva do nosso eixo coordenado y . Continuamos com os questionamentos: Mas este resultado matemático faz sentido? Quais informações físicas podemos abstrair dessas duas situações?

Na situação (a) obtemos $N_1 < mg$ enquanto que em (b), $N_2 > mg$. Se a força normal for menor que a força peso, pode existir uma condição em que o veículo perderá o contato com a superfície, ou seja, $N_1 = 0$. Na verdade essa condição existe e é dada pela velocidade $v = \sqrt{gR}$, conforme eq.(4.1) quando fazemos $N_1 = 0$. Quem nunca rampou com uma bicicleta em uma lombada? O resultado matemático nos diz que isso é possível. E no caso (b) será que é possível ramparmos no declive, ou seja, $N_2 = 0$? Naturalmente os alunos respondem que isso é impossível, pois praticamente todos já experimentaram essa situação quando passam por um declive. Eles notam que o veículo fica mais “colado” na pista, fato explicado pelo resultado $N_2 > mg$. Se o nosso modelo matemático for bom o suficiente para descrever a realidade, precisamos necessariamente abstrair essa informação do resultado. Considerando $N_2 = 0$ em (4.2), obtemos $v = \sqrt{-gR}$. Portanto, o resultado matemático nos diz que é impossível obtermos uma velocidade de modo que o veículo perca o contato com a superfície no ponto mais baixo do declive, pois a raiz negativa não tem significado físico. Isto está em perfeito acordo com o que observamos, pois como já discutido, o veículo adere à pista ainda mais, uma vez que $N_2 > mg$.

Note a quantidade de informações que conseguimos obter a partir da modelagem matemática do sistema. Isso mostra aos alunos que a física, auxiliada por uma matemática adequada, pode ser muito útil para previsão de diversos fenômenos. Uma aplicação direta dos resultados obtidos foi dada ao apresen-

tarmos um vídeo mostrando um dos maiores toboáguas do mundo, o Verrückt, situado no parque Schlitterbahn, na cidade de Kansas City, nos Estados Unidos. A atração foi inaugurada em 2014 e é considerada o maior toboágua com boia do mundo com uma altura máxima de 51m e capacidade para levar até 3 pessoas na boia utilizada no brinquedo, veja Fig.4.7. A discussão que surgiu foi sobre o perigo que existia no ponto mais alto C da trajetória, já que a boia não estava presa aos trilhos e poderia perder o contato com a superfície do toboágua. Neste caso as pessoas poderiam ser lançadas para fora dos trilhos. Já para o ponto mais baixo B este perigo não existe, a princípio, pois a boia iria ficar ainda mais presa aos trilhos. O professor pode ir além nesta discussão e estimar a velocidade máxima $v = \sqrt{gR}$ para que a boia não perca o contato com os trilhos, ou seja, $N = 0$. Nesta situação a altura do ponto A é essencial, pois a energia potencial nesta posição será convertida em energia cinética para a boia chegar até B . Por questões de segurança é necessário que se realizem testes considerando o peso e a altura mínima das pessoas para andarem no brinquedo. Outra discussão que pode aparecer é o porquê do ponto C estar a uma posição mais baixa que o ponto A . Com este exemplo o professor pode introduzir o papel das dissipações, como o atrito, no movimento de sistemas reais. Para que a boia possa subir até o ponto C e percorrer toda a trajetória, o ponto A precisa estar mais alto para compensar as perdas de energia no decorrer do trajeto.



FIGURA 4.7: Foto do Verrückt, um dos maiores toboáguas do mundo inaugurado em 2014 nos Estados Unidos, mostrando os pontos mais altos A e C , e mais baixo B . Neste exemplo os alunos analisaram o movimento da boia segundo os resultados obtidos pela modelagem do sistema nos pontos B e C utilizando a segunda lei de Newton. Foto extraída de [Verrückt 2014].

Continuamos com as discussões sobre MRU e MCU utilizando vários outros exemplos do cotidiano, seguindo uma análise parecida com o que fizemos anteriormente. Ao serem questionados sobre exemplos desses tipos de movimento

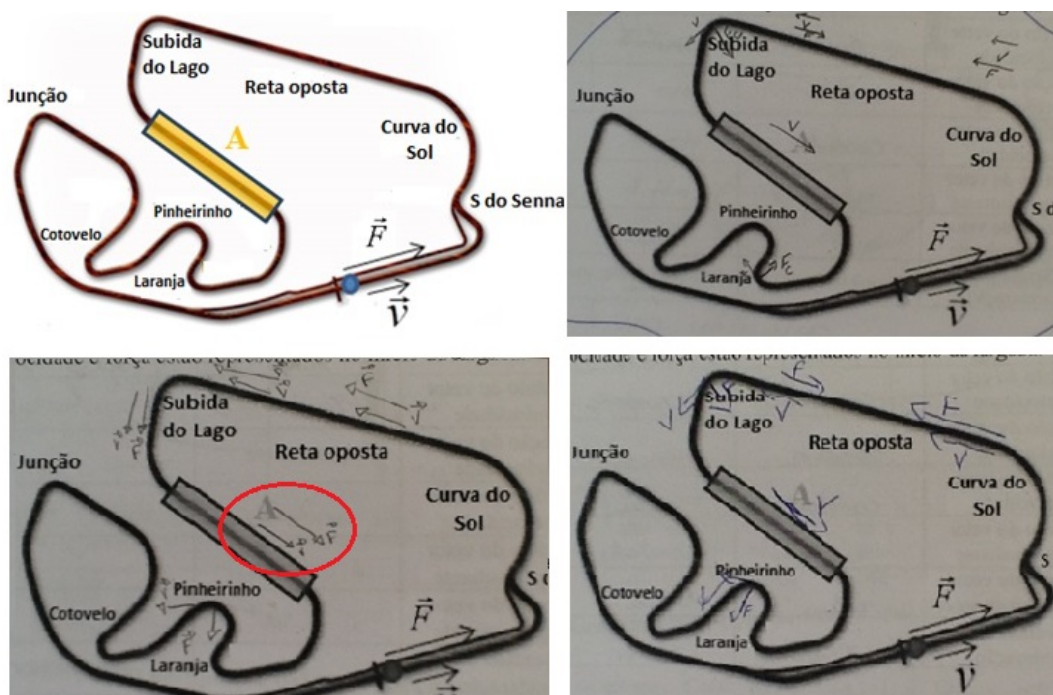


FIGURA 4.8: Circuito de Interlagos utilizado para os alunos representarem os vetores força \vec{F} e velocidade \vec{v} dos carros em alguns pontos especificados pelo professor. Figura extraída de [Interlagos 2007]. No trecho A foi considerado que os carros se moveriam com velocidade constante. São apresentados também respostas de alguns alunos. O círculo vermelho no canto inferior esquerdo da figura foi inserido para destacar a representação do vetor força no trecho em que temos MRU.

os alunos responderam “um avião voando com velocidade constante e sem fazer curvas”, “locomotiva em trilho reto” e a “luz sem ação da gravidade” para o movimento retilíneo uniforme e “satélites em órbita”, “disco rígido” e “ventilador ligado” para o movimento circular uniforme, mostrando familiaridade com o assunto.

Para ver se os alunos sabiam relacionar os vetores força e velocidade no MRU e MCU nós utilizamos uma ilustração do circuito de Interlagos, mostrado na Fig.4.8. A representação dos vetores foi realizada em alguns pontos especificados pelo professor e nós consideramos que os carros deveriam percorrer o trecho A com velocidade constante. Alguns resultados também são mostrados na Fig.4.8.

Neste exercício tivemos boas respostas com os alunos representando os vetores força e velocidade na mesma direção para trechos em que os carros estavam acelerados e perpendiculares entre si nos trechos curvos, com a força apontando

para o centro de curvatura e a velocidade na direção tangente à curva. Foi também observado que as ideias de Aristóteles ainda persistem nas respostas de alguns alunos, pois eles representavam o vetor força no trecho A em que é considerado MRU, veja Fig.4.8. Para estes alunos, a concepção de que é necessário aplicar uma força no sistema para colocá-lo em movimento ainda não tinha sido abandonada.

Ainda utilizando o circuito de Interlagos, os alunos preencheram uma tabela com uma das três respostas - varia (V), constante (C) ou nula (N) - para descreverem as propriedades, tais como módulo, direção e sentido, dos vetores força resultante e velocidade no MRU e MCU. Os resultados são apresentados na tabela 4.1, onde mostramos o número de alunos que consideraram as respostas V, C e N para cada situação. Os resultados na tabela mostram que a análise dos movimentos retilíneo e curvilíneo uniformes foi feita de forma coerente pelos alunos, com exceção do sentido de \vec{F} para o MRU. De maneira geral os resultados nos permitiram avançar para outros exercícios e discussões.

Finalizamos essa atividade com a análise do movimento de um motociclista no interior de um globo da morte. Este sistema é interessante porque foi possível trabalhar todos os conceitos apresentados anteriormente em um único exercício. Iniciamos com a representação das forças que atuavam na motocicleta em diferentes pontos da trajetória, mostrando que a força centrípeta sempre se mantinha na direção do raio do globo. Prosseguimos perguntando para a turma qual seria a velocidade mínima necessária para que o motociclista pudesse completar o ciclo passando pelo ponto mais alto do globo sem sofrer uma queda. Esta é a situação em que $N = 0$ e o valor da velocidade para esta condição é $v = \sqrt{gR}$, da mesma forma como no exemplo da Fig.4.6(a). O índice de acertos em todas as perguntas e o comprometimento dos alunos neste exercício foram muito bons, mostrando que todo o nosso trabalho realizado até o momento tinha sido assimilado de maneira satisfatória pelos alunos.

TABELA 4.1: Propriedades dos vetores força \vec{F} e velocidade \vec{v} no movimento retilíneo uniforme (MRU) e movimento curvilíneo uniforme (MCU). As siglas V, C e N significam varia, constante e nula, respectivamente. Os números correspondem ao número de alunos, num total de 22, que forneceram as respectivas respostas.

Propriedades de \vec{F} e \vec{v}	MRU	MCU
$ \vec{v} $	V = 2	V = 6
	C = 20	C = 16
	N = 0	N = 0
Direção de \vec{v}	V = 4	V = 19
	C = 18	C = 3
	N = 0	N = 0
Sentido de \vec{v}	V = 5	V = 20
	C = 17	C = 2
	N = 0	N = 0
$ \vec{F} $	V = 1	V = 4
	C = 6	C = 13
	N = 15	N = 5
Direção de \vec{F}	V = 3	V = 3
	C = 18	C = 16
	N = 1	N = 3
Sentido de \vec{F}	V = 3	V = 3
	C = 4	C = 16
	N = 15	N = 3

4.5 Atividade 5: Tratamento de sistemas mais complexos e utilização de gráficos

Não tivemos tempo hábil para introduzir formas de movimento mais complexas decorrentes de forças variáveis, como o movimento harmônico simples descrito na seção A.7 do apêndice. Mas nós aumentamos um pouco mais a dificuldade dos exercícios inserindo a força de atrito nos mesmos, sendo este o principal tema da atividade 5. Nesta atividade nós também utilizamos gráficos para auxiliar os alunos na análise e descrição do movimento, como sugerido nas seções A.6 e A.8 do apêndice.

Iniciamos analisando a resultante centrípeta de um dos brinquedos mais emocionantes de alguns parques de diversão, o rotor. Este consiste de um dispositivo que gira em torno de seu próprio eixo acoplado a um grande cilindro vertical de raio R , veja ilustração na Fig.4.9(a). As pessoas ficam de pé apoiadas na parede interna deste cilindro. Quando colocado em rotação o piso é removido e as pessoas continuam apoiadas na parede sem escorregar, pois a força peso da pessoa (mg) é equilibrada pela força de atrito estático. Assumindo que o cilindro gira com velocidade constante v e a lei de Coulomb para o atrito estático sendo dada por $f_{at} = \mu_e N$, em que μ_e é o coeficiente de atrito estático da superfície que compõe a parede interna do cilindro e N a reação normal da parede na pessoa, os alunos tiveram que determinar a velocidade do rotor em função de μ_e , g e R .

Apenas seis alunos obtiveram uma resposta de forma satisfatória. Estes consideraram que a resultante centrípeta era igual à força normal e que a força peso seria equilibrada pela força de atrito estático, ou seja, $P = f_{at}$, como mostra a Fig.4.9(b). Nas Figs.4.9(b) e (c) mostramos dois erros cometidos de forma geral pelos alunos, em que a força peso é equilibrada pela normal e a resultante centrípeta é considerada na mesma direção das forças peso e de atrito, respectivamente.

Ao final da atividade, o professor comentou os possíveis erros cometidos pelos alunos e resolveu corretamente o problema na lousa. O objetivo desta prática foi tentar esclarecer os eventuais erros cometidos para que pudéssemos

continuar a atividade com maior confiança.

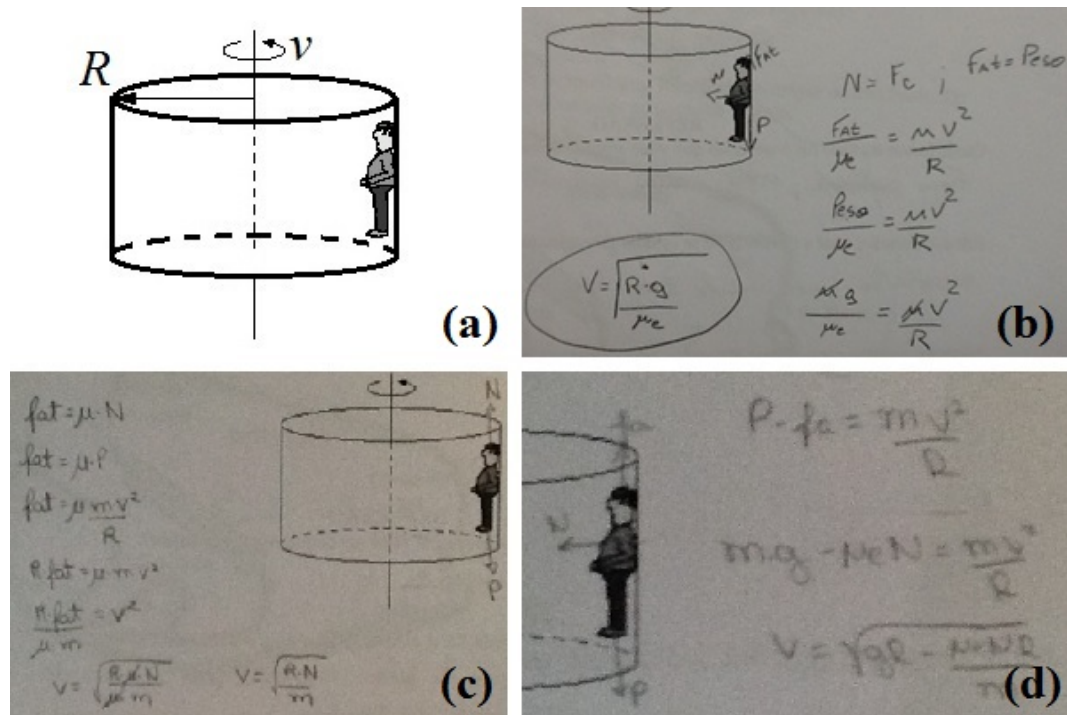


FIGURA 4.9: (a) Rotor de raio R girando em torno do seu próprio eixo com velocidade v constante. Uma pessoa apoiada na parede interna do cilindro vertical permanece apoiada mesmo depois que o piso é removido, pois sua força peso é equilibrada pela força de atrito da parede sobre a pessoa. Mostramos também o desenvolvimento dos cálculos de forma correta em (b) e alguns erros cometidos pelos alunos em (c) e (d).

Fonte: Autor e alunos.

Prosseguimos chamando a atenção dos alunos para o fenômeno físico do sistema e as implicações que poderíamos abstrair a partir do cálculo obtido. Os alunos foram questionados sobre o valor da força normal quando $v = 0$. A resposta foi basicamente “*seria igual a zero*” pela maioria, uma vez que matematicamente temos $N = mv^2/R$. Outra questão foi se seria possível o brinquedo funcionar se não existisse atrito entre a pessoa e a parede do rotor. Dentre as respostas temos, “*Não, porque o atrito faz com que a pessoa fique fixa*”, “*Não, pois sem o f_{at} , a pessoa cairia por não estar apoiado em nada*” e “*Não, pois com a ausência de atrito a normal não se encontraria na posição de força centrípeta devido ao apoio dos pés no brinquedo. E se a força centrípeta for nula, o brinquedo não funciona*”. Um aluno que equivocadamente obteve o resultado $\sqrt{R/g}$ respondeu que “*Sim, já que o atrito não entra na equação*”. Apesar de incorreta, essa resposta é interessante porque mostra uma tentativa do aluno de conciliar o

resultado matemático com a análise do fenômeno, que é o objetivo da nossa proposta.

Continuamos a atividade analisando o movimento de automóveis em duas situações distintas. Na primeira consideramos a ação da força de atrito no movimento dos veículos em curvas planas e horizontais. Em seguida aumentamos um pouco a complexidade do sistema ao considerar que as curvas eram inclinadas por um ângulo θ sem atrito e com atrito para comparações. A atividade foi útil para orientar os alunos sobre os perigos de realizar curvas com um veículo em alta velocidade. Os alunos tiveram que determinar a velocidade máxima permitida para que a curva fosse realizada com segurança em função de parâmetros como, o raio de curvatura R , a aceleração da gravidade g quando for o caso, e o coeficiente de atrito cinético entre os pneus e a pista μ quando a força de atrito era considerada. Os resultados obtidos foram bastante satisfatórios, com a maioria da turma resolvendo os problemas corretamente.

Na Fig.4.10 mostramos o raciocínio de alguns alunos ao considerar o movimento curvilíneo de um veículo sob a ação da força de atrito. Eles obtiveram com êxito o valor da velocidade máxima $v = \sqrt{g\mu R}$ para que a curva pudesse ser realizada sem que o automóvel perdesse o traçado da mesma. Após a discussão dos resultados com a turma, nós analisamos a situação de 3 carros percorrendo à mesma velocidade 3 curvas planas e horizontais com 3 raios de curvatura diferentes, como mostrado à esquerda da Fig.4.10. Foi perguntado qual deles faria a curva com maior segurança. Esperávamos que os alunos respondessem de imediato o carro 3, pois quanto maior o raio de curvatura maior a velocidade permitida para realizar a curva com segurança uma vez que $v \propto \sqrt{R}$. Cerca de metade da turma respondeu de forma correta, mostrando que os alunos ainda estavam relutantes em utilizar o resultado matemático para analisar o fenômeno físico. As respostas obtidas foram variadas tais como, “o raio grande é melhor para fazer a curva, pois tem mais espaço pra andar”, “a trajetória 3 é melhor porque tem maior raio”. Um aluno descreveu o fenômeno corretamente mas não se atentou para a identificação do carro, “Com uma maior curva a velocidade máxima aumenta, então a pessoa tem uma janela maior de velocidade que pode chegar antes de derrapar, portanto maior segurança. Resposta: 2”. Outro aluno

utilizou o resultado obtido para a velocidade máxima de forma incorreta, afirmando que o mais seguro seria “O carro 1, pois segundo a fórmula, quanto menor o raio, menor será a velocidade, realizando então a curva com maior segurança”. Isso mostra que ele não se atentou que estávamos considerando 3 veículos à mesma velocidade neste caso.

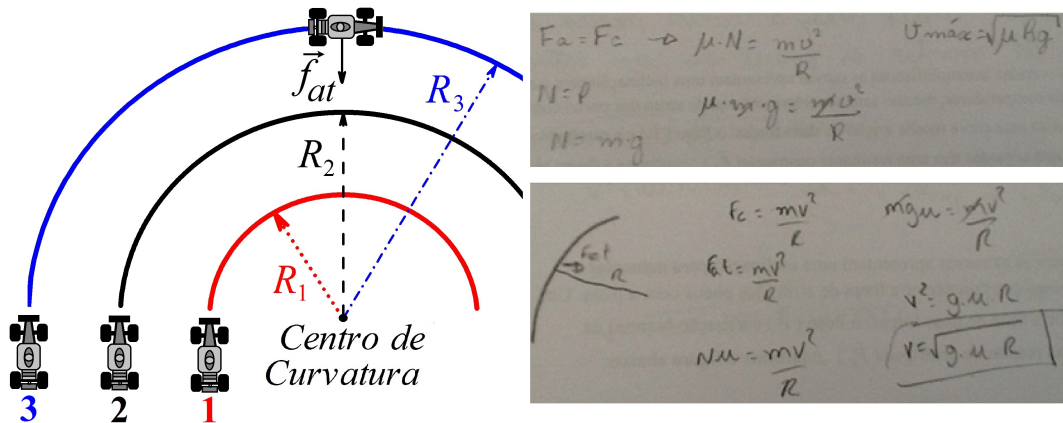


FIGURA 4.10: À esquerda ilustramos três veículos percorrendo três trajetórias circulares horizontais com raios de curvatura diferentes sob o efeito da força de atrito \vec{f}_{at} . À direita apresentamos os cálculos de alguns alunos para obtenção da velocidade máxima para os veículos fazerem as curvas sem perderem o traçado da mesma, sendo dada por $v = \sqrt{g\mu R}$.

Fonte: Esquerda autor e direita alunos.

Prosseguimos a atividade discutindo algumas medidas de segurança como a manutenção adequada dos pneus de um automóvel. Baseado em nosso resultado matemático foi questionado qual das grandezas da equação deveríamos analisar neste caso. O índice de acertos foi alto, com destaque para algumas respostas como “Quanto maior o coeficiente de atrito, maior poderá ser a sua velocidade sem o deslizamento”, “a grandeza relevante é o coeficiente de atrito (μ) dinâmico que existe de forma considerável tanto na experiência quanto na matemática, graças aos pneus e suas rugosidades que, ao entrarem em contato com o solo, exercem uma força de atrito juntamente com a normal, responsável por tornar efetivo e controle do automóvel em manobras como frenagens e curvas. Dessa forma, é importante manter os pneus sempre adequados em relação à rugosidade e ranhuras” e “Se (μ) do pneu com a pista diminuir, a força de atrito também diminuirá aumentando a chance de derrapagem”. Poucas respostas foram incorretas, mas uma em especial nos chamou a atenção, pois mesmo depois de

tanta discussão e insistência na explicação do significado físico dos parâmetros da equação obtida, o aluno afirmou que “*Se a velocidade for alta, o pneu deve ter um raio grande, sendo proporcional a esta e garantindo a segurança*”, ou seja, ele considerou que a grandeza R , que representa o raio da curva, era o raio do pneu.

O próximo passo foi considerar que a trajetória circular era inclinada por um ângulo θ na ausência de qualquer força de atrito, ou seja, queríamos analisar apenas o efeito da inclinação da pista no valor da velocidade limite para manter o automóvel na trajetória horizontal. Os alunos não tiveram nenhum problema para resolver este exercício. A partir da decomposição do vetor força normal eles obtiveram o resultado de forma correta, sendo dado por $v = \sqrt{Rg \tan \theta}$. Se compararmos esse resultado com o resultado para a curva horizontal com atrito obtemos $\mu = \tan \theta$. Note que se $\theta = 0$ obtemos $\mu = 0$ e portanto o veículo não conseguiria fazer a curva, pois $v = 0$, como esperado. Portanto, a inclinação da pista faz o papel da força de atrito na trajetória horizontal para manter o veículo na curva. Este fenômeno é comumente explorado em circuitos fechados de ciclismo e corridas de carros, por exemplo, para que os ciclistas ou pilotos atinjam velocidades maiores na competição. Infelizmente nenhum aluno se atentou para isso e nem cogitaram em fazer a comparação entre os resultados.

Após algumas discussões, o professor forneceu alguns valores para os parâmetros para obtenção numérica de v . Considerando $g = 10\text{m/s}^2$ e $R = 100\text{m}$ os alunos tiveram que determinar a velocidade limite para as seguintes inclinações $\theta = 5, 71^\circ, 84, 3^\circ$ e 100° . Todos os alunos obtiveram corretamente os resultados para a velocidade, sendo dados respectivamente por $v = 10\text{m/s}$, 100m/s e $\sqrt{-5670}\text{m/s}$. Em seguida a turma teve que definir em qual destas inclinações não existia uma velocidade segura para a realização da curva, justificando matematicamente através da equação da velocidade limite. Os alunos responderam adequadamente a questão, enfatizando que na inclinação de 100° não teria uma velocidade segura, “*pois não existe raiz negativa*”. Esta análise foi encerrada com os alunos representando, através de uma figura, a situação em que o ângulo de inclinação era de 100° , explicando o porquê da impossibilidade de realizar a curva. Veja alguns exemplos na Fig.4.11.

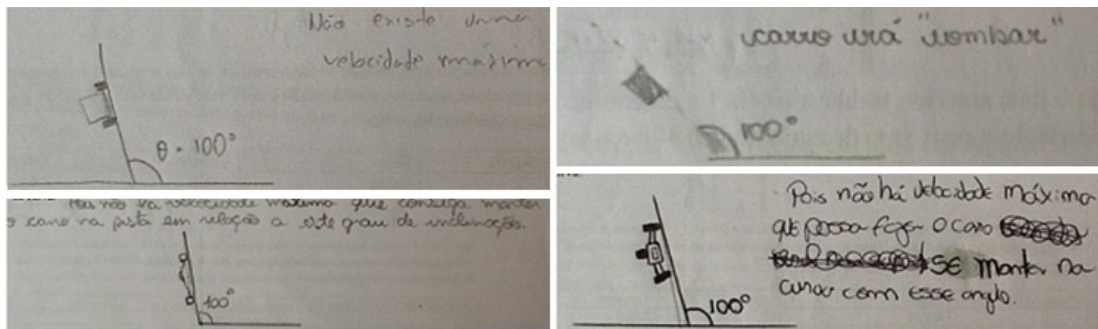


FIGURA 4.11: Representação do automóvel se movendo em uma pista inclinada por um ângulo $\theta = 100^\circ$ mostrando a justificativa dos alunos da impossibilidade de realizar o movimento.

Fonte: Alunos.

Após um intervalo de duas semanas, em razão do período de avaliações do colégio, apresentamos a última etapa da quinta atividade. Nós exploramos os conceitos anteriores, considerando agora carros em curvas inclinadas sob a ação de forças de atrito. Nesse dia, aproximadamente 60% da turma estava presente, pois a atividade foi aplicada no dia posterior à última avaliação escolar e alguns alunos preferiram descansar nesse dia. O professor revisou alguns conceitos, como decomposição de forças, antes da atividade ser iniciada. Nós apresentamos aos alunos uma ilustração semelhante a mostrada na Fig.4.12(a). Nesta, nós apresentamos duas situações em que a força de atrito deveria ser considerada, para dentro da curva $\vec{f}_{at}^{(1)}$ e para fora da curva $\vec{f}_{at}^{(2)}$. Se considerássemos $\theta = 0$ teríamos apenas $\vec{f}_{at}^{(1)}$, que é a responsável por manter o carro na curva. No caso da pista inclinada, analisamos diversas possibilidades para o ângulo de inclinação θ , de $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e também ângulos $\theta > \pi/2$. Por esta razão consideramos a força $\vec{f}_{at}^{(2)}$, pois à medida que aumentamos θ o carro poderá deslizar para baixo devido ao seu peso, como no caso do trenó em uma pista de gelo inclinada. A principal questão a ser analisada nesta etapa foi: Será que é possível obter matematicamente para qual valor de θ a força $\vec{f}_{at}^{(2)}$ começa a se tornar relevante em comparação com $\vec{f}_{at}^{(1)}$? Nós mostramos isso tanto matematicamente quanto graficamente.

Considerando os eixos coordenados x e y paralelos aos vetores \vec{F}_c e \vec{P} , respectivamente, o professor começou orientando os alunos sobre a decomposição de forças. Em seguida ele disse aos alunos que eles deveriam obter a velocidade v em função dos parâmetros do sistema e que as expressões matemáticas deveriam

ser da seguinte forma:

Situação 1, $f_{at}^{(1)} = \mu N$:

$$v_1 = \sqrt{Rg \left[\frac{\sin(\theta) + \mu \cos(\theta)}{\cos(\theta) - \mu \sin(\theta)} \right]}. \quad (4.3)$$

Situação 2, $f_{at}^{(2)} = \mu N$:

$$v_2 = \sqrt{Rg \left[\frac{\sin(\theta) - \mu \cos(\theta)}{\cos(\theta) + \mu \sin(\theta)} \right]}. \quad (4.4)$$

Note que em ambas situações consideramos o mesmo coeficiente de atrito μ , ou seja, $f_{at}^{(1)} = f_{at}^{(2)}$. Se compararmos as eqs.(4.3) e (4.4) a única diferença é o sinal de μ .

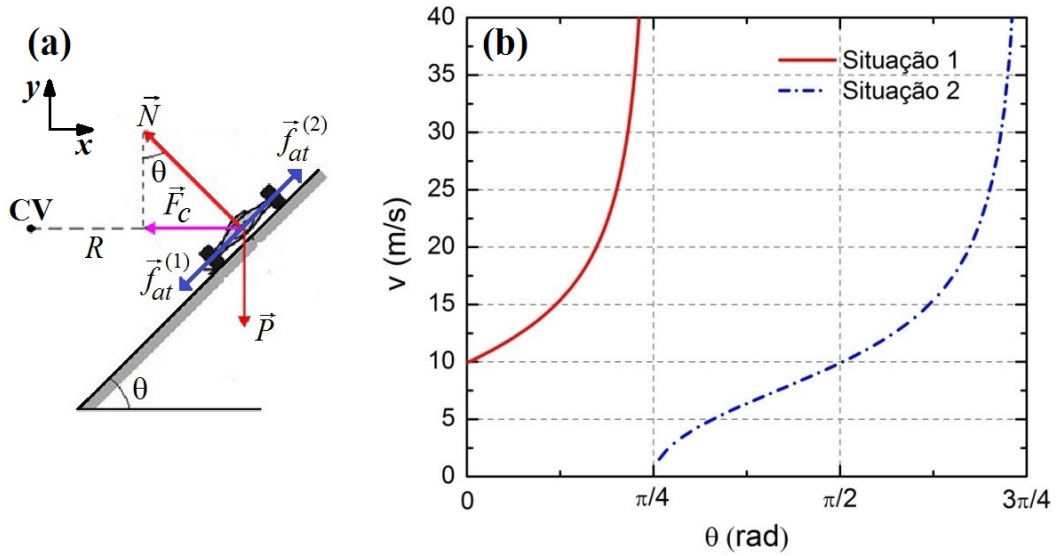


FIGURA 4.12: (a) Ilustração de um carro em uma pista inclinada por um ângulo θ e todas as forças relevantes para nossa análise, sendo \vec{F}_c a resultante centrípeta, \vec{N} a reação normal da pista no carro, \vec{P} sua força peso, R o raio de curvatura com relação ao centro de curvatura CV e duas situações diferentes consideradas para a força de atrito. Na situação 1 consideramos $f_{at}^{(1)}$ para dentro da curva e na situação 2 consideramos $f_{at}^{(2)}$ para fora da curva. (b) Mostramos os respectivos gráficos da velocidade do carro v em função do ângulo θ para ambas situações, obtidos a partir da decomposição de forças para cada caso. Para este gráfico nós consideramos $g = 9,81m/s^2$, $R = 10m$ e $\mu = 1$.

Fonte: Autor.

A aparência da expressão da velocidade assustou os alunos de modo que eles alegaram que o exercício era muito difícil antes mesmo de começar. Eles comentaram que nunca teriam capacidade de chegar ao resultado, com comentários

como “*não sei nem como começar*” ou “*não vou nem perder meu tempo*”. Mesmo o professor dizendo que os auxiliaria caso precisassem não impediu que grande parte da turma deixasse de tentar resolver o exercício. Outros alunos alegaram estarem cansados, pois acabaram de sair da semana de avaliações da escola e que não teriam condições de se concentrarem na questão. Por fim, apenas 6 alunos consideraram a resolução do problema, sendo que quatro conseguiram realizar sem qualquer auxílio do professor e os outros dois necessitaram de pequenas dicas para a resolução do problema. Na Fig.4.13 mostramos o raciocínio seguido pelos alunos para a resolução da situação 1.

Handwritten mathematical derivation for the velocity v_1 on an inclined curve. The work shows the derivation of the normal force N and its horizontal component $N \cos(\theta) - \mu N \sin(\theta) = mg$. It then relates this to the centripetal force $\frac{mv^2}{R}$, leading to the final equation $v = \sqrt{Rg \frac{\sin(\theta) + \mu \cos(\theta)}{\cos(\theta) - \mu \sin(\theta)}}$.

FIGURA 4.13: Desenvolvimento dos cálculos dos alunos para obtenção de v_1 , (4.3).

Fonte: Alunos.

A atividade prosseguiu considerando o caso em que a força de atrito era para fora da curva, ou seja, os alunos deveriam considerar $f_{at}^{(2)}$ no diagrama de forças apresentado na Fig.4.12(a). Para obtenção de v_2 os alunos tiveram que resolver o problema sem qualquer auxílio do professor. Segundo eles esta situação foi mais difícil porque a resultante centrípeta é dada pela subtração das componentes horizontais da reação normal e da força de atrito. Três alunos foram coerentes e obtiveram v_2 , dada pela eq.(4.4), corretamente.

Após a obtenção de v_1 e v_2 nós analisamos os resultados para alguns valores particulares do ângulo de inclinação θ . Se fizermos os limites das eqs.(4.3) e (4.4) para θ tendendo a zero obtemos:

Situação 1, $f_{at}^{(1)} = \mu N$:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} v_1 = \sqrt{Rg \left[\frac{\sin(0) + \mu \cos(0)}{\cos(0) - \mu \sin(0)} \right]} = \sqrt{Rg\mu}. \quad (4.5)$$

Situação 2, $f_{at}^{(2)} = \mu N$:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} v_2 = \sqrt{Rg \left[\frac{\sin(0) - \mu \cos(0)}{\cos(0) + \mu \sin(0)} \right]} = \sqrt{-Rg\mu}. \quad (4.6)$$

Note que em ambas situações consideramos a força de atrito como sendo μN .

Todos os alunos que se propuseram a resolver essa questão obtiveram o resultado correto. A maioria comentou que a situação 2 para $\theta = 0$ não seria possível, pois foi obtida uma raiz quadrada negativa como resultado, e portanto não descrevia a realidade do sistema físico. Para a situação 1 eles lembraram do resultado obtido anteriormente e comentaram que o resultado correspondia à velocidade limite obtida para o veículo na curva horizontal. A obtenção do resultado anterior foi motivo de alvoroço entre os alunos permitindo alguns comentários do tipo “*então está provado que essa equação gigante está certa mesmo*” e “*a outra equação da atividade está certa também*”. A atividade fez com que os alunos se atentassem para a importância da utilização da matemática na análise de problemas envolvendo fenômenos físicos, deixando o professor seguro quanto ao interesse dos alunos para prosseguir com a atividade.

Novamente pedimos para os alunos calcularem v_1 e v_2 , mas agora considerando que a força de atrito seja nula, $\mu = 0$. Um aluno se manifestou rapidamente e disse que “*agora ficou fácil, porque se está inclinada e não tem atrito vai ser a fórmula da tangente*”. Este foi apoiado de maneira unânime pelos colegas. A partir daí os alunos se empenharam para provar que o comentário feito pelo aluno estava correto, mostrando grande satisfação e até alguns gritos de alegria no momento em que chegaram ao resultado esperado, dado em ambas situações por $v = \sqrt{Rg \tan \theta}$, uma vez que $f_{at}^{(1)}$ e $f_{at}^{(2)}$ são nulas. Foi interessante a observação de um dos alunos que considerou $\theta = 0$ e $\mu = 0$ em seus cálculos obtendo uma velocidade nula. O professor aproveitou para comentar o resultado com a turma pedindo para que os alunos comentassem o resultado. Um dos alunos disse que “*se não tem nem atrito nem ângulo, é impossível o carro não sair da curva*”, o que causou argumentos como “*se fosse impossível, a raiz daria negativa e não zero*”. Uma aluna encerrou a questão ao dizer que “*sem atrito e ângulo, o único jeito do carro não sair da curva é ficar parado, por isso a velocidade é zero*”. Esse tipo de debate é justamente o que gostaríamos de observar, os alunos interagindo

entre si e expondo os seus argumentos com base tanto no fenômeno em estudo quanto nos resultados matemáticos obtidos.

Os alunos perceberam que a interpretação física dos resultados pode ser muito diferente com a alteração das variáveis envolvidas nas equações obtidas. Comentários como “*manda mais uma, Professor!*” por um aluno com rendimento mediano e “*estou me sentindo uma engenheira!*” realizado por uma aluna que prestaria geografia nos vestibulares, mostraram que a atividade evoluía de maneira muito produtiva e agradável. Diante desta empolgação pedimos aos alunos que eles analisassem v_1 e v_2 para o caso em que a inclinação fosse $\theta = \pi/2$. Novamente o aluno que notou que a equação sem atrito reproduziria um resultado anterior também se manifestou para esta situação com um intenso “*Ah, esse vai dar o do rotor!*” Esta hipótese tornou a visualização do exercício mais simples para os outros alunos. Se fizermos os limites de v_1 e v_2 para $\theta \rightarrow \pi/2$ obtemos $v_1 = \sqrt{-Rg/\mu}$ e $v_2 = \sqrt{Rg/\mu}$.

Todos os alunos conseguiram obter estes resultados sem maiores problemas concluindo de maneira geral que v_2 era a mesma velocidade limite obtida para o rotor e que $f_{at}^{(1)}$ não poderia ser considerado nesta situação, uma vez que isso conduzia a uma raiz negativa no resultado de v_1 . Nas palavras deles, “*não tem como o carro sair por cima*”. Um aluno resolveu a questão sem realizar os cálculos. Assim como os outros ele percebeu que seria impossível o veículo sair por cima se a inclinação fosse de 90° . Ele concluiu que a força de atrito atuando no sistema não poderia ser para baixo afirmando que, “*se é impossível ter atrito para baixo, deve dar raiz negativa*”. Este caso é interessante porque o aluno hipotetizou qual o resultado matemático deveria ser obtido a partir da análise do fenômeno. Nota-se com isso uma mudança de postura por parte dos alunos ao analisar as situações físicas, aliando a física e a matemática.

O encerramento da atividade foi realizado com os alunos analisando um gráfico para as situações em que foram consideradas $f_{at}^{(1)}$ e $f_{at}^{(2)}$. O gráfico é apresentado na Fig.4.12(b) onde nós representamos as velocidades v_1 (linha sólida vermelha) e v_2 (linha pontilhada-tracejada azul) em função do ângulo de inclinação da pista θ para $g = 9,81m/s^2$, $R = 10m$ e $\mu = 1$. Eles tiveram que

responder para quais intervalos de θ deveríamos considerar $f_{at}^{(1)}$ e $f_{at}^{(2)}$.

Os alunos trocaram muitas informações mostrando o gráfico uns para os outros e fazendo bastante barulho na sala, o que chamou a atenção do inspetor de alunos. Mas tudo correu normalmente e os alunos conseguiram realizar com certa facilidade a leitura do gráfico. Na Fig.4.14 mostramos algumas análises. A maioria concordou que para $\theta = 45^\circ$ a força de atrito $f_{at}^{(2)}$ começa a se tornar relevante e precisa ser considerada neste problema.

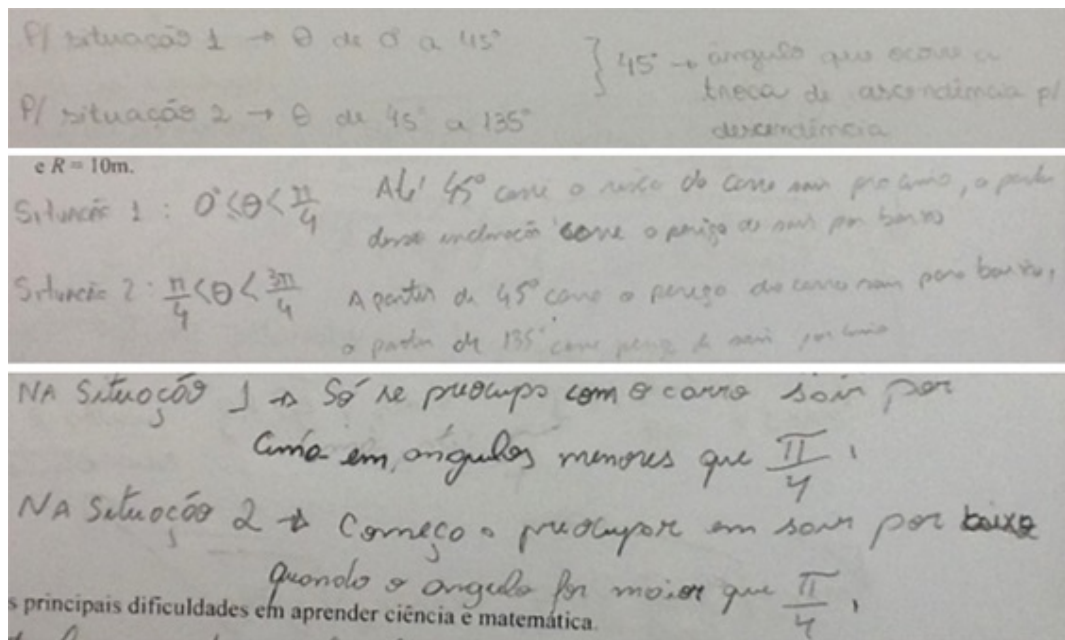


FIGURA 4.14: Respostas de alguns alunos para a análise do gráfico apresentado na Fig.4.12(b).

Fonte: Alunos.

Com esta última atividade mostramos que é possível tratar sistemas mais complexos e próximos da realidade, pois forças dissipativas estão por toda parte. Infelizmente, a importância devida para este tópico não é dada nas aulas de física do ensino médio.

4.6 Fechamento das Atividades

Ao final das atividades o professor pediu aos alunos que listassem suas principais dificuldades em aprender física e matemática. A maioria das respostas indicavam limitações em compreender os enunciados. Além da dificuldade rela-

tada em iniciar e desenvolver os cálculos há também o problema da interpretação de textos. Alguns alunos apresentaram que possuem dificuldades mais específicas, tais como aplicação de fórmulas, resolução de equações com frações, analisar o resultado para ver se as equações obtidas estão corretas, aplicar a segunda lei de Newton e realizar decomposição de forças, entre outros. A resposta de um aluno nos intrigou, porque ele disse que o que dificultou foi *“Ter perdido a base do conhecimento, ou seja, os primeiros conceitos, dificultando o aprofundamento de qualquer assunto”*.

Sem dúvida é necessário que haja uma sequência didática bem estabelecida pelos professores de uma escola. A base do conhecimento deve ser bem definida. Isso significa que um bom currículo na disciplina de física pode não ser bem aproveitado pelo aluno se não houver uma parceria com professores de outras disciplinas, como a de matemática, para ajudar a formar essa base. A intedisciplinaridade é fundamental para o bom desenvolvimento cognitivo dos alunos. Infelizmente nessa proposta não tivemos tempo de tentar formar parcerias com outros professores, mas certamente será algo que tentaremos no futuro.

Ainda na última aula, foi criado um ambiente de discussão e debate pelos próprios alunos para exporem suas opiniões sobre a atividade desenvolvida. Vale lembrar que nossa proposta foi praticada de forma extracurricular, pois o material apostilado deveria ser seguido de maneira rigorosa para a preparação dos vestibulares e ENEM. Os alunos que sempre tiveram facilidade com as exatas deram opiniões já esperadas, do tipo *“Foi muito legal, consegui avançar ainda mais na matemática”*, *“foi show de bola, matemática na física é muito mais interessante pra aprender”* e *“agora sempre que olhar uma corrida de Fórmula 1 na televisão vou pensar nessas atividades e tentar calcular”*. Os alunos que não se sentiam confiantes nas atividades que envolviam os cálculos matemáticos fizeram colocações interessantes, afirmando que *“ainda não consigo entender muito bem, mas já não odeio tanto essa matéria”*. Outra aluna afirmou que *“se a gente que é aluno consegue calcular essas coisas, imagina os caras que são bons de verdade nisso. Deve sair cada coisa sensacional”*. Um aluno que prestaria artes cênicas colocou que *“Até hoje achava que a matemática era só um monte de fórmula”*. Esse comentário fez com que o professor lhe perguntasse no que a matemática

tinha se transformado para ele. A resposta foi, *“A matemática nos exercícios de curva que a gente fez mostra que não adianta só saber fórmula, mas a gente também tem que pensar e ver o que é impossível”*. Isso mostra que o aluno conseguiu abstrair algo a mais a partir da relação entre a física e a matemática que nós estabelecemos nas atividades. Outro comentário que mereceu destaque foi que *“a matemática sozinha só serve para calcular o x , nem sei quem é ele! Já na física o x pode ser velocidade, força, um monte de coisas que a gente tem que analisar pra ver se aquilo pode acontecer mesmo”*.

O professor encerrou as atividades agradecendo a todos pela participação e seriedade que encararam esse desafio. Ficamos muito satisfeitos com os resultados obtidos e a evolução da turma como um todo, já que os alunos que gostavam de física e matemática aprofundaram seus conhecimentos e se sentiram desafiados com as atividades, resolvendo-as de maneira agradável. Os alunos que preferiam as áreas de humanas ou biológicas perceberam a importância da matematização para a construção do conhecimento científico, e que mesmo com suas limitações conseguiram evoluir e entender alguns conceitos que até então eram impossíveis, na opinião deles, de entender. A satisfação de dever cumprido pelo professor veio no discurso de formatura da turma, em que a nossa proposta foi citada como *“uma grande preparação para entender as incógnitas da vida nova que estaria por vir”*.

Capítulo 5

Considerações Finais

A preparação deste material foi realizada com base na experiência que o professor tinha com a turma em que a proposta foi aplicada. Ele ministrava aulas para a mesma desde o primeiro ano do ensino médio e sabia das dificuldades e habilidades individuais dos alunos. Ou seja, toda a experiência do professor é válida para inovar e tentar atingir um número cada vez maior de alunos para aprender e se interessar pela disciplina que está sendo ministrada.

Esta proposta foi aplicada inteiramente em uma escola particular do estado de São Paulo com bons alunos. Apesar de serem bons, observamos que muitas deficiências básicas ainda prevalecem, como interpretação dos problemas, cálculo com frações ou números decimais, definição e representação dos vetores de um sistema físico, entre outros. Não esperávamos observar tantas deficiências básicas no terceiro ano do ensino médio. Isso significa que os alunos ingressarão nas universidades despreparados impedindo que a universidade cumpra o seu papel. Quais seriam as razões destas deficiências? Os dados do PISA 2015 mostram como ponto crítico mais o Ensino Fundamental do que o Médio, pois os alunos que fazem a prova têm 15 anos. Talvez seria interessante a aplicação de propostas como estas já no Ensino Fundamental para melhorar o diagnóstico para uma possível reforma no ensino de ciências e matemática.

A aplicação da proposta mostrou-se extremamente efetiva com resultados muito produtivos, pois foi observado o aumento do interesse dos alunos em

aprender matemática e física. Acreditamos que isso se deve principalmente pelo fato desta proposta ser desafiadora. A sensação de capacidade dos alunos fez com que aumentasse sua auto confiança no decorrer das atividades. Alunos confiantes e dispostos a aprender trazem uma enorme satisfação ao professor.

Outro ponto importante a ser levantado é se a nossa proposta seria viável para alunos do ensino médio público, onde o problema é ainda maior.

Esperamos que esta seja útil para melhorar as aulas de física do professor do ensino básico e que este material possa servir como instrumento de reflexão para contribuir para encontrarmos as respostas para a melhoria das deficiências dos alunos em matemática e física nos diversos níveis escolares.

Referências Bibliográficas

- [Boulos 1987] P. B. I. de Carmargo. *“Geometria Analítica - Um Tratamento Vetorial”*. 2ª Edição, McGraw-Hill, 1987.
- [Brasil 1996] Brasil. Ministério de Educação e Cultura. LDB - Lei nº 9394/96, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional. Brasília: MEC, 1996.
- [Brasil 2002] PCN+ Ensino Médio, Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. *“Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias”*, p.23, 2002.
- [Bruner 1973] J. S. Bruner. *“O Processo da Educação”*. Nacional, São Paulo, 1973.
- [Dirac 1939] Lecture delivered on presentation of the James Scott prize, 1939. Published in: Proceedings of the Royal Society (Edinburgh) Vol. **59**, 1938-39, Part II pp. 122-129. Disponível em <<http://www.damtp.cam.ac.uk/events/strings02/dirac/speech.html>>. Acesso em Junho de 2015.
- [Interlagos 2007] Circuito de Interlagos após revisão em 2007. Disponível em <<http://voltarpida.blogspot.com.br/2010/05/interlagos-70-anos.html>>. Acesso em Junho de 2015.
- [Karam 2007] R. A. S. Karam. *“Matemática como estruturante e física como motivação: uma análise de concepções sobre as relações entre matemática e física.”* Anais do VI ENPEC, Florianópolis, SC (2007).
- [Moysés 2002] H. Moysés Nussenzveig. *“Curso de Física Básica”*, Vol. 2, 4ª Ed. Editora Edgard Blücher LTDA (2002).
- [Oliveira 2014] S. Oliveira. O POVO online, Jornal de Hoje, Cotidiano. *“93% dos alunos saem da escola com deficiência em matemática.”* Ensino Médio 2014. Disponível em <<http://www.opovo.com.br/app/opovo/cotidiano/2014/12/23/noticiasjornalcotidiano,3367129/93-dos-alunos-saem-da-escola-com-deficiencia-em-matematica.shtml>>. Acesso em Junho de 2015.
- [Paulino 2007] A. R. Paulino, I. Paulino e R. Feliz. *“A falta de conhecimento de matemática atrapalha o aprendizado de física de alunos de Ensino Médio?”*

In: XVII Simpósio Nacional de Ensino de Física - SNEF, 2007, São Luís. CD-ROM, 2007.

- [Pietrocola 2002] M. Pietrocola. “*A matemática como estruturante do conhecimento físico.*” Caderno brasileiro de ensino de física **19** (1), 89-109, 2002.
- [PISA 2015] Brasil no PISA 2015, Análises e reflexões sobre o desempenho dos estudantes brasileiros. Disponível em <<http://portal.inep.gov.br/web/guest/pisa-no-brasil>>. Acesso em Janeiro de 2016.
- [Poincaré 1995] H. Poincaré. “*O Valor da Ciência*”. Tradução de Maria Helena Franco Martins. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.
- [Tricario 1989] H. R. Tricário. “*A formação dos professores de Física.*” Caderno Brasileiro de Ensino de Física **6** (2) 143-147, 1989.
- [Verrückt 2014] . The Verrückt. Disponível em <<http://tudoparahomens.com.br/verrukt-o-maior-toboagua-do-mundo/>>. Acesso em Junho de 2015.
- [Wigner 1960] E. Wigner, “*The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences,*” in: Communications in Pure and Applied Mathematics, **13** (1), 1960.

Apêndice A

Produto Educacional

Este produto educacional foi desenvolvido para motivar o professor de física do ensino médio a utilizar a matemática não só como uma ferramenta, mas como algo intrínseco e inseparável da física. Nos últimos anos as ideias e técnicas desenvolvidas na física tem mudado dramaticamente e o que tem sido exposto para os alunos, através dos meios de comunicação, é um mundo de tecnologias que resolvem tudo bastando apertar alguns botões para a solução de problemas. Na verdade o que está por trás disso são análises criteriosas em laboratório e modelagens de sistemas, ambos utilizando, na maioria dos casos, técnicas computacionais, teóricas e experimentais avançadas em que a matemática tem um papel fundamental.

Este material está organizado de forma a trabalhar a matemática em cada etapa de um curso introdutório de física utilizando alguns poucos exemplos da mecânica clássica, como leis de Newton, a obtenção de uma lei de movimento seguindo as ideias de Aristóteles, descrição da equação de movimento de sistemas mais complexos, como o movimento de um carro em uma pista inclinada com atrito e o oscilador harmônico simples, e a análise do movimento destes sistemas através de gráficos. Antes da apresentação e discussão destes sistemas, apresentamos na primeira seção algumas sugestões de como este produto pode ser aplicado em sala de aula. Além disso, nos preocupamos em deixar claro para o professor na segunda seção, como a matemática pode ser essencial para auxiliar a nossa intuição, com o objetivo de motivar o aluno a desenvolver argumentos funda-

mentados e sólidos para justificar suas ideias. Tudo foi desenvolvido utilizando uma linguagem acessível para o aluno do ensino médio abordando tópicos básicos sobre funções, vetores e suas projeções, versores, o significado físico de equações vetoriais e sistema de coordenadas cartesiano. Esperamos que o professor de física utilize este material como um objeto norteador em suas atividades e que possa estender a proposta para outros tópicos da física.

A.1 Sobre a aplicação do produto

Durante o desenvolvimento dos capítulos deste produto nós tentamos expressar nossas ideias da forma como este foi aplicado na sala de aula. Você perceberá que nós conduzimos os temas através de perguntas. Atualmente os alunos são muito passivos de modo que, se nós esperarmos as perguntas partirem deles, nós nos decepcionaremos. O próprio professor pode conduzir os alunos a algumas perguntas à medida que o tema é desenvolvido em sala de aula. Em algumas situações, tentamos colocar os alunos em contradição para ver se eles realmente entendiam o assunto.

Em um primeiro momento você pode fornecer as respostas acompanhadas de um “será”. Por exemplo, será que a projeção da posição da partícula em movimento circular uniforme no eixo x é dada por um cosseno? É necessário tomar cuidado nesses momentos, porque à medida que forem estabelecidas perguntas que fornecem a resposta correta ao problema os alunos simplesmente confirmarão a pergunta com um balançar positivo de cabeça por comodidade. É nesse momento que é possível colocá-los em contradição para forçá-los a pensar. Portanto, em vez de um cosseno, você poderia perguntar, será que a projeção da posição da partícula em movimento circular uniforme no eixo x é dada por um seno? Independente da resposta, nós sempre damos seguimento à discussão com um por quê?

Quando criança, todos nós temos a tendência de estabelecer uma cadeia de porquês incessante ao questionar tudo o que vemos. À medida que os pais respondem um outro porquê surge e assim por diante, até que os pais ou outros se

cansam e respondem porque sim! Nas escolas não é diferente. Em várias situações o professor responde ao aluno com um porque sim ou porque está no livro, ou ainda gera algum constrangimento pela pergunta feita, etc. Isso acaba destruindo a maravilhosa cadeia de porquês dos alunos, tornando-os completamente passivos e envergonhados. O que nós fizemos nesta proposta foi recriar essa cadeia, estimulando o questionamento em todas as situações convencendo os alunos de que, aluno bom é aquele que pergunta. Não existem perguntas idiotas ou vazias. Pelo contrário, se o aluno faz uma pergunta completamente sem sentido e fora de contexto com o que o professor está discutindo, este é o momento perfeito para o professor diagnosticar problemas de contextualização e de entendimento do assunto em questão.

Estas são apenas algumas sugestões que podem ser consideradas para a aplicação desta proposta. Esperamos que o professor do ensino básico aproveite este material e que o mesmo seja útil para melhorar suas aulas de física com o auxílio da matemática, assim como foi para nós.

A.2 A matemática e nossa intuição: uma combinação poderosa

Ideias e imaginação são produtos da nossa mente criativa. Descobrir novas ideias e aplicações pode ser muito recompensador. Encontrar a resposta certa é somente uma parte do pensamento científico e esta pode desencadear uma variedade de novos caminhos e descobertas. Em ciências geralmente começamos com uma hipótese para solução de problemas. Nós “achamos” que uma aplicação pode dar certo ou não, que um modelo pode descrever determinados dados experimentais ou que alguma análise no laboratório pode estar incorreta. Uma hipótese precisa vir acompanhada de fundamentação para que nossos argumentos se tornem robustos o bastante para que possamos convencer outras pessoas a investirem não só dinheiro e tempo em algumas ideias, mas também para criar meios para que essas ideias evoluam. Para isso a matemática é essencial.

Mostraremos isso com um exemplo muito simples em que, a princípio,

é inviável realizar o experimento para comprovarmos uma hipótese. A fundamentação que precisamos será fornecida pela matemática.

Considerando a circunferência de uma moeda qualquer envolvida por um barbante de maneira bem ajustada, pergunte aos alunos se, após aumentarmos 1 metro no comprimento do barbante, dado pelo comprimento da circunferência da moeda, a folga entre a moeda e o barbante é maior, menor ou igual à folga entre um barbante e o planeta Terra nas mesmas condições. Para facilitar a visualização do problema utilize ilustrações como as mostradas na Fig.A.1.

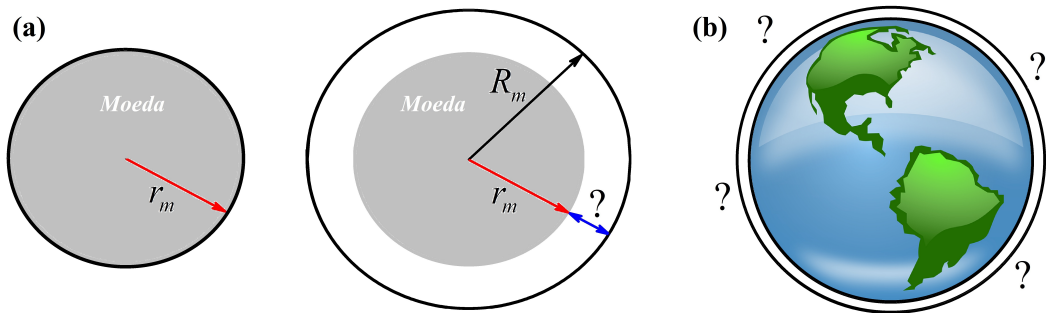


FIGURA A.1: (a) Ilustração de uma moeda de raio r_m envolvida por um barbante de forma bem ajustada mostrando a nova circunferência de raio R_m formada pelo barbante após acrescentarmos 1m em seu comprimento. O ponto de interrogação é a folga $R_m - r_m$ que os alunos precisam discutir se será maior, menor ou igual à folga entre o barbante e o planeta Terra nas mesmas condições (b).

Fonte: Autor.

Em todos os cenários que utilizamos este exemplo, a maioria dos alunos responderam que a folga entre o raio da Terra e o barbante, após o acréscimo de 1 metro em sua circunferência, é muito menor que no caso da moeda. As respostas geralmente estão alicerçadas no argumento de que 1 metro é uma distância muito pequena diante da dimensão do raio do planeta Terra, enquanto que para a moeda é muitas vezes maior que o seu raio. A ideia aqui é convencer os alunos de que é necessário apelarmos para algum tipo de equacionamento para chegarmos a uma conclusão plausível, pois os argumentos baseados apenas na intuição são pouco convincentes e insuficientes para um desfecho satisfatório do problema.

Se chamarmos o raio da moeda de r_m , o raio da Terra de r_T e os novos raios, após o acréscimo de 1m no comprimento da circunferência de ambos, de

R_m e R_T , respectivamente, tem-se para a moeda,

$$\begin{aligned} 2\pi r_m + 1 &= 2\pi R_m \\ R_m - r_m &= \frac{1}{2\pi}, \end{aligned} \tag{A.1}$$

em que $R_m - r_m$ é a folga entre a moeda e o barbante. Realizando o mesmo procedimento para o planeta Terra, obtemos para a folga entre a Terra e o barbante $R_T - r_T = 1/2\pi$. Ou seja, a folga é a mesma nas duas situações e mede em torno de 16cm. O resultado matemático nos diz que a folga é independente do raio da circunferência do corpo envolvido pelo barbante. Portanto, a eq.(A.1) nos diz que se realizarmos o experimento envolvendo a circunferência de uma bola de futebol ou a circunferência de qualquer outro objeto ou planeta com um barbante, o resultado será sempre o mesmo. Isso pode ser confirmado em sala de aula através de experimentos simples utilizando uma moeda e outros objetos que tenham simetria esférica ou cilíndrica, como um copo, uma garrafa ou um cesto de lixo.

Este resultado geralmente choca muitos alunos que, mesmo diante de um procedimento bem elaborado matematicamente, resistem em acreditar que não há diferença. Este tipo de resistência e conflito é muito comum no ensino de ciências, porque os alunos possuem suas próprias concepções. Este é apenas um exemplo de que é possível chamar a atenção dos alunos para a necessidade de confirmarmos formalmente ideias intuitivas, independentemente da área do conhecimento. Nas ciências isso é imprescindível, pois em muitos casos não é possível realizarmos o experimento de imediato para confirmarmos nossas hipóteses, seja por questões financeiras ou por limitações tecnológicas da época. Como um aluno poderia envolver o planeta Terra com um barbante utilizando apenas suas habilidades motoras e de observação, para comprovar sua hipótese sobre o tamanho da folga obtida em comparação com a mesma utilizando-se uma moeda? Felizmente, nada nos impede de tratar o sistema matematicamente e chegar a uma conclusão plausível.

A.3 Abstraindo informações sobre o fenômeno físico a partir de sua modelagem matemática

A partir da modelagem de um fenômeno físico em estudo é possível abstrair uma enorme quantidade de informações, mesmo que os alunos não tenham observado o fenômeno em uma aula prática ou no dia a dia. Para isso podemos utilizar exemplos de qualquer área da física, como o primeiro postulado da teoria da relatividade restrita de Einstein. Este trata do princípio da constância da velocidade da luz que diz que, a velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor c em todos os referenciais inerciais, independentemente do movimento relativo da fonte e do observador. Este exemplo é pertinente porque Albert Einstein é uma figura popular e conhecido por todos. A possibilidade do aluno estar em contato com a teoria de um cientista tão famoso e brilhante pode despertar o interesse no assunto.

Após a contextualização sobre referenciais inerciais e movimento relativo pergunte aos alunos como Einstein poderia ter chegado à conclusão de que a velocidade limite do universo é c e por qual razão esta é uma constante. A utilização de teorias de cientistas famosos também pode ser muito útil para mostrar para os alunos que o conhecimento científico pode ser acessado por todos e não apenas por alguns poucos com uma genialidade, que eles acreditam ser inalcançável. Veja como a matemática pode nos auxiliar neste caso.

A partir das equações de Maxwell do eletromagnetismo é possível concluir que a luz é uma onda eletromagnética através de um resultado obtido matematicamente, que nos diz que $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$. Este é precisamente a velocidade da luz no vácuo obtida experimentalmente ($c \approx 300.000\text{km/s}$) e os parâmetros μ_0 e ϵ_0 são constantes da natureza que nos diz o quão permeável é o vácuo para linhas de campos magnéticos e elétricos, respectivamente. Com esta contextualização, não é difícil concluir que se μ_0 e ϵ_0 são constantes, necessariamente c também é uma constante da natureza.

Para mostrar que a velocidade da luz é a velocidade limite do universo para transmissão de informação pode-se utilizar a fórmula da contração de Lo-

rentz, dada por:

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (\text{A.2})$$

a qual especifica a relação entre o comprimento L de um objeto que se move a uma velocidade v com relação a um observador, e seu comprimento L_0 , medido quando o objeto está em repouso. Fazendo uma análise matemática da raiz quadrada da eq.(A.2) é possível mostrar que, para obtenção de um número real e diferente de zero para L , necessariamente precisamos ter $v < c$. Essa condição é necessária porque o comprimento do objeto é uma propriedade física, ou seja, este deve ser expresso por números reais. Mesmo que a raiz exista para $v = c$, não tem sentido físico a partícula desaparecer ($L = 0$) porque sua velocidade é igual a velocidade da luz. Isto mostra claramente a necessidade da matemática e da física caminharem juntas. Se $v > c$ teremos uma raiz negativa, portanto não expressa a realidade física do objeto. Logo, a conclusão é que a velocidade do objeto será sempre menor que a velocidade da luz, $v < c$, ficando assim demonstrado matematicamente que a velocidade c é uma velocidade limite. Existem vários experimentos com partículas que comprovam este resultado e que podem ser mencionados para trazer ainda mais credibilidade à necessidade do tratamento matemático de sistemas em um curso de física.

Este tipo de análise também pode ser feita a partir de exemplos do cotidiano dos alunos, como o ilustrado na Fig.A.2. Na Fig.A.2(a) é apresentada a reação normal \vec{N}_1 de uma superfície curva, com raio de curvatura R , em um veículo de peso mg se movendo com uma velocidade \vec{v} , como se o motorista estivesse passando no ponto mais alto de um morro. A contextualização também pode ser um aluno em uma bicicleta passando por uma lombada. Na Fig.A.2(b) temos o mesmo veículo passando agora pelo ponto mais baixo de um declive com o mesmo raio de curvatura e reação normal da superfície dada por \vec{N}_2 .

Antes de iniciar os cálculos é importante deixar claro para os alunos que, se o veículo estiver executando um movimento retilíneo uniforme (MRU), ou seja, se movendo com velocidade constante \vec{v} e resultante nula, em uma superfície plana, a reação normal da superfície é igual à força peso do veículo, $N = mg$. É interessante provocar os alunos com perguntas para continuar a discussão, como

por exemplo: E no caso de uma superfície curva, como na Fig.A.2, como devemos proceder? Note que estamos introduzindo uma forma um pouco mais complexa de movimento contextualizada por uma forma de movimento mais simples que eles já conhecem, que é o MRU.

Neste exemplo não é necessário considerarmos que o movimento circular executado pelo veículo seja uniforme, pois nós estamos abordando apenas o movimento no ponto mais alto da trajetória, em (a), e mais baixo, em (b). Como o movimento é circular a resultante agora é a força centrípeta $F = mv^2/R$.

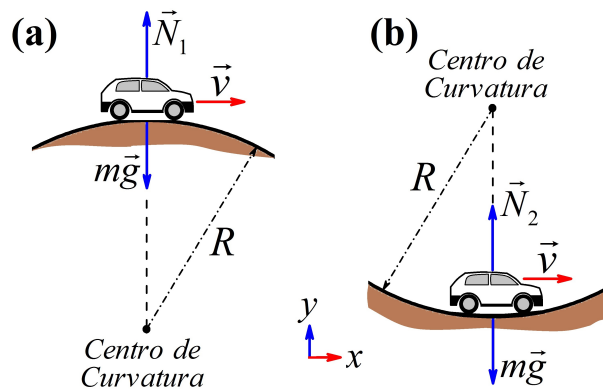


FIGURA A.2: (a) Veículo com velocidade \vec{v} se movendo em uma superfície com raio de curvatura R , passando pelo ponto mais alto da superfície. (b) Ilustramos o mesmo veículo passando pelo ponto mais baixo de um declive com mesmo raio de curvatura. São apresentadas a reação normal da superfície \vec{N}_1 e \vec{N}_2 , para (a) e (b), respectivamente, e a força peso $m\vec{g}$.

Fonte: Autor.

Considerando os eixos coordenados x e y na direção da velocidade e da força normal, respectivamente, temos pela segunda lei de Newton para a Fig.A.2(a) que,

$$\begin{aligned} \vec{F}_{Ry} &= \vec{N}_1 + m\vec{g} \\ -m\frac{v^2}{R} &= N_1 - mg \\ N_1 &= mg - m\frac{v^2}{R}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Analisando o resultado matemático obtido, observe que nesta situação a reação normal da superfície é menor que a força peso, diferentemente do resultado obtido para o veículo se movendo em uma superfície plana, em que $N = mg$. Questione os alunos se este resultado faz sentido.

Prossiga realizando perguntas: E no caso da Fig.A.2(b) o que temos? Utilizando o mesmo procedimento obtemos,

$$\begin{aligned}\vec{F}_{Ry} &= \vec{N}_2 + m\vec{g} \\ m\frac{v^2}{R} &= N_2 - mg \\ N_2 &= mg + m\frac{v^2}{R}.\end{aligned}\tag{A.4}$$

Observe que agora a força normal é maior que a força peso por um fator dado pela resultante centrípeta. Note que nesta situação o sinal da força centrípeta é positivo, pois esta aponta na direção positiva do eixo coordenado y . Continue questionando: Mas este resultado matemático faz sentido? Quais informações físicas podemos abstrair dessas duas situações?

Na situação (a) obtemos $N_1 < mg$ enquanto que em (b), $N_2 > mg$. Se a força normal for menor que a força peso, pode existir uma condição em que o veículo perderá o contato com a superfície, ou seja, $N_1 = 0$. Na verdade essa condição existe e é dada pela velocidade $v = \sqrt{gR}$, conforme eq.(A.3) quando fazemos $N_1 = 0$. Quem nunca rampou com uma bicicleta em uma lombada? O resultado matemático nos diz que isso é possível.

E no caso (b) será que é possível ramparmos no declive, ou seja, $N_2 = 0$? Naturalmente os alunos respondem que isso é impossível, pois praticamente todos já experimentaram essa situação quando passam por um declive. Eles notam que o veículo fica mais “colado” na pista, o que explica o resultado $N_2 > mg$. Se o nosso modelo matemático for bom o suficiente para descrever a realidade, precisamos necessariamente abstrair essa informação do resultado. Considerando $N_2 = 0$ em (A.4), obtemos $v = \sqrt{-gR}$. Portanto, o resultado matemático nos diz que é impossível obtermos uma velocidade de modo que o veículo perca o contato com a superfície no ponto mais baixo do declive, pois a raiz negativa não tem significado físico. Isto está em perfeito acordo com o que observamos, pois como já discutido, o veículo adere à pista ainda mais, uma vez que $N_2 > mg$.

Note a quantidade de informações que conseguimos obter a partir da modelagem matemática do sistema. Isso mostra aos alunos que a física, auxiliada por uma matemática adequada, pode ser muito útil para previsão de diversos

fenômenos. Outros exemplos sobre a abstração de informações de um fenômeno físico a partir de sua modelagem matemática serão dados nas seções que seguem.

A.4 A utilidade das funções na ciência

Matematicamente falando, uma função fornece um único valor de $f(x)$ para cada valor do parâmetro x . No exemplo da contração de Lorentz, descrito na seção anterior, temos uma função que fornece um único valor para o comprimento L para cada valor da velocidade v , ou seja, $L = L(v)$. Portanto, é possível concluir que as funções são utilizadas em ciências para estabelecermos relações entre propriedades físicas.

Estas podem ser de diversas formas, lineares, polinomiais, exponenciais, senoidais, etc. nos fornecendo muita informação sobre o comportamento de algumas propriedades físicas quando modificamos alguns parâmetros do sistema, como velocidade, força, temperatura, pressão, energia, entre outros.

Além das funções que descrevem o comportamento dos sistemas que estão sendo tratados em determinada aula, utilize outras de outros tópicos da física ou mesmo outras áreas do conhecimento como a biologia ou química, pois a ideia é mostrar a utilidade das funções nas ciências. Como exemplo podemos considerar a equação que descreve a lei dos gases ideais dada por $PV = nRT$, em que P é a pressão no gás, V o seu volume, n o número de mols do gás, R a constante universal dos gases e T a sua temperatura. Se quisermos saber como o volume de um gás ideal se comporta à medida que variamos a pressão aplicada no mesmo, podemos escrever

$$V = \frac{nRT}{P}, \quad (\text{A.5})$$

ou seja, temos a função $V = V(P)$. Essa relação entre V e P nos mostra que se considerarmos um processo em que a temperatura T do gás é mantida constante, o volume do mesmo diminuirá (aumentará) se aumentarmos (diminuirmos) a pressão aplicada no gás.

A eq.(A.5) também fornece a função $V = V(T)$ se considerarmos um

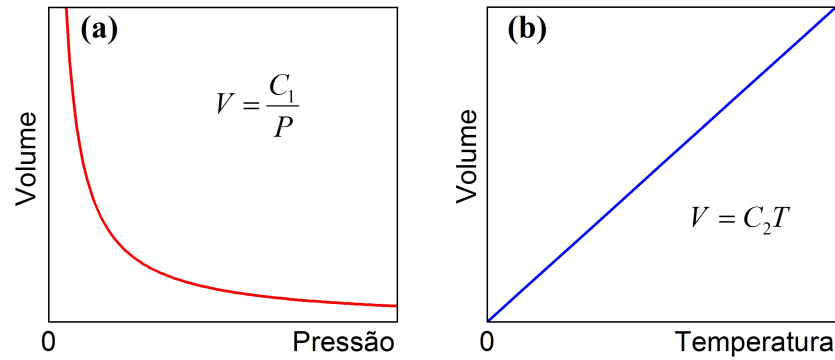


FIGURA A.3: (a) Esboço do gráfico do volume pela pressão para um processo isotérmico ($T = cte$) obtido a partir da função descrita na eq.(A.5). A função neste caso é uma hipérbole com constante $C_1 = nRT$. (b) Mostramos o volume em função da temperatura para um processo isobárico ($P = cte$). A função agora é linear com coeficiente angular dado por $C_2 = nR/P$.

Fonte: Autor.

processo em que a pressão é constante. Neste caso à medida que a temperatura do gás aumenta (diminui) o seu volume também aumenta (diminui). As funções descritas nestes dois processos são uma hipérbole e uma reta, respectivamente, e estão esboçadas nos gráficos da Fig.A.3.

Conhecer essas relações pode nos permitir até mesmo prever o comportamento de sistemas nunca observados na natureza ou no laboratório.

A.5 Prevendo o futuro de um sistema a partir de uma lei física: Newton vs. Aristóteles

Nesta seção algumas regras e princípios da mecânica clássica serão apresentadas através da elaboração de uma lei de movimento a partir das ideias de Aristóteles e da segunda lei de Newton. Ao final vamos comparar as duas leis de movimento para mostrar quais foram os enganos cometidos por Aristóteles.

O papel da mecânica clássica é prever o futuro. Isso significa que se nós sabemos tudo sobre um sistema em um determinado instante de tempo, e se nós sabemos as equações que governam como o sistema muda no tempo, então nós poderemos prever o futuro do mesmo. Dessa forma teremos condições de dizer onde o sistema estará em um tempo posterior. É isso que significa dizer que

as leis da física clássica são *determinísticas*. Esta é uma palavra chave essencial para introduzir tópicos mais abstratos da física, como a mecânica quântica. Da mesma forma, se for possível descrever o passado do sistema utilizando os mesmos procedimentos e equações, nós dizemos que o sistema é *reversível*. Ou seja, a mecânica clássica nos permite dizer para onde o sistema vai e de onde o sistema veio utilizando as mesmas leis de movimento.

Para obtermos as equações de evolução de um sistema precisamos de uma *lei física*. Um sistema que evolui no tempo é chamado de *sistema dinâmico*. Portanto, nós precisamos de uma lei dinâmica que nos forneça as regras sobre como prever o futuro do sistema. Ou seja, nós queremos descobrir para qual *estado* o sistema evoluirá a partir de um estado inicial conhecido. Este estado inicial fica completamente determinado se soubermos a posição e a velocidade do sistema. Os alunos ainda podem perguntar, mas o que é um sistema? Um *sistema* pode ser um ou uma coleção de objetos dados por partículas, campos, ondas entre outros.

Para resolução de problemas sobre dinâmica utilizamos a segunda lei de Newton,

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (\text{A.6})$$

em que a força resultante \vec{F} é dada pelo produto da massa m do objeto pela sua aceleração \vec{a} . Em outras palavras, a força é igual a massa vezes a taxa com que a velocidade do objeto muda, uma vez que $\vec{a} = \Delta\vec{v}/\Delta t$. Note que nós podemos abstrair uma informação muito importante da eq.(A.6). Se não há força aplicada em um corpo, não há mudança em sua velocidade, ou seja, não há mudança no estado de movimento do corpo. Mas esta informação só pode ser obtida se olharmos para a forma matemática da eq.(A.6). Note que esta é uma equação vetorial, pois ambas a força e a aceleração são vetores.

Mas o que é um vetor?

Para um matemático as vezes é suficiente dizer que o comprimento de um seguimento de reta é cinco. Um físico ou engenheiro ou até mesmo uma pessoa de outra área do conhecimento iria querer saber, “Cinco o quê?”. Cinco metros, cinco milímetros ou cinco anos luz? Ou seja, em ciências precisamos fornecer as

unidades das grandezas físicas. Expressamos a força em newtons (N), a massa em quilogramas (kg), o tempo em segundos (s), entre outros. Quando um número e uma unidade de medida é suficiente para descrever uma propriedade física, como no caso da massa, da temperatura, do tempo, etc. estamos trabalhando com uma grandeza *escalar*. Por outro lado, para descrevermos uma força ou a aceleração de um corpo, precisamos acrescentar ao escalar, que descreve a magnitude da grandeza, a sua direção e o seu sentido. Isso é um *vetor*. É por isso que dizemos que a força resultante em um corpo possui a direção de seu movimento, pois a equação vetorial dada por (A.6) nos diz que o vetor força é diretamente proporcional ao vetor aceleração. Portanto, se existir alguma força resultante sendo aplicada em um sistema significa que o vetor velocidade do mesmo está mudando. Isso implica que a força pode provocar apenas uma mudança na direção da velocidade, ou do movimento, e não necessariamente na sua magnitude. Como exemplo, podemos citar a força centrípeta em um movimento circular uniforme.

Para representarmos a magnitude, a direção e o sentido das propriedades físicas de um corpo em movimento, por exemplo, nós precisamos de um *sistema de coordenadas*. Sua construção começa com a escolha de um ponto do espaço para ser a origem do sistema de coordenadas. É isso que nós chamamos de *referencial*. O movimento do corpo será representado e descrito matematicamente com relação a esta posição de referência. A escolha desta referência é arbitrária, isso significa que a origem do seu sistema de coordenadas pode ser colocada em qualquer lugar. Geralmente a escolha da origem é feita para fazer com que as equações de movimento se tornem o mais simples possível. O próximo passo é escolher três eixos perpendiculares. Estes também podem ser colocados em qualquer posição, desde que os mesmos sejam perpendiculares. Os eixos são usualmente chamados de x , y e z , mas nós também podemos chamá-los de x_1 , x_2 e x_3 , de a , b e c , ou qualquer outro nome que você queira atribuir aos mesmos. Este sistema de eixos é chamado de *sistema de coordenadas cartesiano*. O professor também pode mencionar a existência de outros tipos de sistemas de coordenadas como polares, cilíndricas, esféricas e outros que são explorados de acordo com a simetria do problema para facilitar os cálculos.

Após a escolha de um referencial podemos representar não só o valor da

velocidade de um objeto, por exemplo, mas também a direção e o sentido em que o mesmo está se deslocando, como ilustrado na Fig.A.4. O mesmo ocorre quando descrevemos a posição de um navio no oceano, a de um aluno na sala de aula ou mesmo uma localização arbitrária utilizando um GPS (*Global Positioning System*).

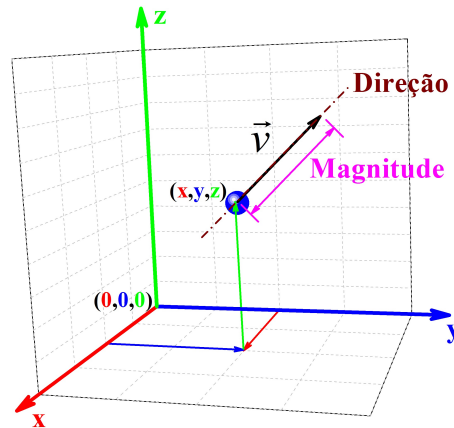


FIGURA A.4: Magnitude e direção do vetor velocidade \vec{v} de um objeto localizado na posição (x, y, z) de um sistema de coordenadas cartesianas com relação à origem $(0, 0, 0)$.

Fonte: Autor.

Para entender melhor o significado físico da segunda lei de Newton e se a mesma faz sentido vamos elaborar matematicamente uma lei de movimento baseada nas ideias de Aristóteles.

Nós vivemos em um mundo dominado pela fricção. Se tentarmos mover uma cadeira na sala de aula precisamos aplicar uma força sobre a mesma. Quanto maior a força aplicada maior será a velocidade da cadeira, mas se pararmos de empurrá-la ela cessa o movimento rapidamente. De acordo com Aristóteles, um objeto só pode se mover enquanto existir uma força resultante diferente de zero aplicada sobre ele. Naturalmente, a direção do movimento será a mesma da aplicação da força. Logo, a lei de movimento de Aristóteles pode ser escrita matematicamente como,

$$\vec{F} = m\vec{v}, \quad (\text{A.7})$$

em que \vec{F} é a força total aplicada e, de acordo com Aristóteles, a resposta à aplicação desta força seria o vetor velocidade \vec{v} . Com um pouco de reflexão não é difícil concluir que o fator de proporcionalidade, dado por m , é a massa do

objeto, pois quanto maior m menor é a velocidade do mesmo.

A lei expressa pela eq.(A.7) parece fazer muito sentido para a maioria dos estudantes, pois é o que vemos no caso da cadeira e em muitas outras situações do dia a dia. Por que então a lei de Newton, dada pela eq.(A.6), diz que a força é proporcional à aceleração do objeto e não à velocidade? Por que Aristóteles estava errado? Aristóteles, assim como a maioria de nós quando estamos iniciando nossos estudos sobre movimento, chegou a algumas conclusões erradas por não entender que o atrito, ou fricção, é uma força. A força total aplicada na cadeira é aquela necessária para superar a força de atrito para colocar a cadeira em movimento e não necessariamente para produzir o movimento da mesma. E quando a força de atrito é insignificante, o que acontece?

O engano de Aristóteles fica evidente nesta situação. Se colocarmos a cadeira sobre uma pista de gelo, a cadeira continua a se mover em linha reta mesmo após cessarmos a aplicação da força sobre a mesma. Isso está em contradição com a lei dada pela eq.(A.7), pois para $F = 0$ deveríamos ter $v = 0$. Note como a relação matemática pode nos auxiliar na descrição do fenômeno. Por outro lado, se tivermos $F = 0$ na lei de Newton, eq.(A.6), a aceleração é igual a zero, o que significa que a velocidade do objeto não varia, mas o mesmo pode estar em movimento retilíneo uniforme se $v \neq 0$. Ou seja, para existir movimento não é necessário que exista uma força aplicada no objeto o tempo todo.

Mas como podemos prever o futuro do objeto em movimento através das leis de Aristóteles e de Newton?

Para facilitar os nossos cálculos vamos considerar que o “mundo” do objeto é composto por uma linha. Isso significa que estamos tratando o problema em uma única dimensão. Essa dimensão, ou linha, pode ser o eixo x , y ou z do nosso sistema de coordenadas. Vamos tratar o movimento no eixo x . Como nós não estamos considerando forças de atrito, podemos assumir que a cadeira ou o objeto em questão é uma partícula. A forma geométrica do objeto não importa nesta situação. Sendo a velocidade do objeto dada por $v = \Delta x / \Delta t$ e o tempo inicial $t_0 = 0$ podemos escrever a eq.(A.7) como,

$$F = m \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow x(t) = x_0 + \frac{F}{m} t, \quad (\text{A.8})$$

em que x_0 é a posição da partícula no tempo inicial $t = t_0 = 0$. Essa equação nos diz que a posição da partícula em um tempo qualquer, $x(t)$, ou seu estado futuro, pode ser obtida se conhecermos sua posição inicial x_0 , a força total aplicada F e sua massa m . Em outras palavras, qualquer que seja a posição da partícula no tempo t_0 , no próximo instante de tempo sua posição será deslocada de uma quantidade definida. No caso de uma força constante e positiva a partícula se moverá na direção positiva do eixo x por uma quantidade Ft/m . Note que, se a força aplicada for nula, teremos $x(t) = x_0$, e a partícula permanece em repouso em qualquer instante t posterior, como discutido anteriormente.

Para obtenção da equação de movimento de Newton vamos considerar, por simplicidade, que a partícula possui uma aceleração constante dada por $a = \Delta v / \Delta t = [v(t) - v_0] / t$. Isto significa que a partícula é acelerada a partir de sua velocidade inicial v_0 , em $t_0 = 0$, até a velocidade final v em um tempo total t , sem qualquer alteração de sua direção, veja Fig.A.5. Logo,

$$v(t) = v_0 + at. \quad (\text{A.9})$$

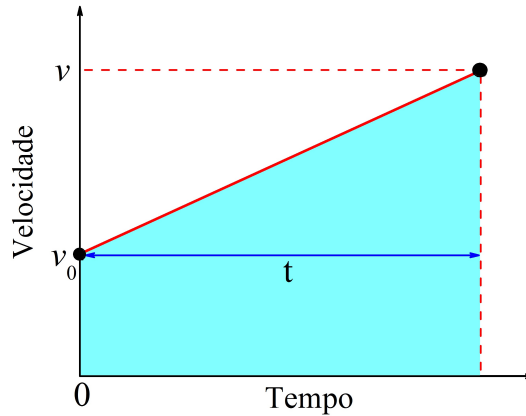


FIGURA A.5: Gráfico da velocidade em função do tempo para uma partícula com aceleração constante a , dada pela inclinação da reta, ou seja, $a = [v(t) - v_0] / t$.

Fonte: Autor.

O deslocamento da partícula é dado por,

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v_0 + v(t)}{2} \Rightarrow x(t) = x_0 + \frac{[v_0 + v(t)]}{2}t, \quad (\text{A.10})$$

pois $[v_0 + v(t)] / 2$ é a velocidade média da partícula no tempo total t . Combinando as equações (A.9) e (A.10) para eliminar $v(t)$ obtemos:

$$x(t) = x_0 + \frac{(v_0 + v_0 + at)}{2}t \Rightarrow x(t) = x_0 + v_0t + \frac{a}{2}t^2. \quad (\text{A.11})$$

Utilizando a segunda lei de Newton, eq.(A.6), em que $a = F/m$, obtemos finalmente a equação que nos permite prever o futuro da partícula segundo esta lei, ou seja,

$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{F}{2m}t^2. \quad (\text{A.12})$$

Note que se a força resultante for nula ($F = 0$) neste caso, teremos $x(t) = x_0 + v_0t$. Diferentemente da lei de movimento de Aristóteles, a eq.(A.12) nos diz que uma partícula se moverá em linha reta com velocidade constante $v_0 \neq 0$, mesmo quando $F = 0$. Este é o *movimento retilíneo uniforme* ou MRU. Este resultado nos conduz à primeira lei de Newton que diz que, um corpo permanecerá em seu estado de repouso ou movimento retilíneo uniforme quando a força resultante aplicada no mesmo for nula. Estes resultados estão em perfeito acordo com o que observamos na prática para corpos macroscópicos, conferindo às leis de Newton do movimento total credibilidade para estes casos. Note como a matemática nos auxiliou nestas conclusões. Além de obtermos a equação de movimento do sistema, nós demonstramos matematicamente o erro de Aristóteles e conseguimos abstrair a primeira lei de Newton do resultado obtido quando consideramos $F = 0$.

A.6 Equação geral e seus casos particulares: movimento com atrito

Em Física é muito comum obtermos equações que descrevem o comportamento de um sistema de forma geral, ou seja, considerando vários tipos de forças aplicadas e condições em que o mesmo é submetido. Diferentes situações particulares podem ser analisadas a partir destas equações gerais quando anulamos determinadas forças ou alteramos tais condições. A obtenção deste tipo de equação pode ser extremamente vantajosa para os alunos aprenderem a fazer análises, visualizar situações e chegar a conclusões mais gerais. Estas dificilmente são concebidas a partir de situações particulares, nas quais são descritas apenas por equações específicas, pois raramente são feitas correlações entre resultados

nestes casos. Isso faz com que o aluno tenha que memorizar uma infinidade de equações para a descrição do mesmo fenômeno tratado com diferentes condições, podendo tornar a Física em um obstáculo de memorização e aplicação de fórmulas. Se for mostrado aos alunos a possibilidade de obter uma equação geral para o problema e que, a partir desta é possível derivar as equações particulares para diferentes condições em que o fenômeno é considerado, é possível que os alunos comecem a analisar situações diversas por conta própria, apenas pela curiosidade de prever o que pode acontecer com o sistema a partir do resultado matemático. Nós observamos isso durante a aplicação deste produto.

Para a situação que estudamos é interessante analisar primeiramente alguns casos particulares de movimento circular uniforme (MCU) sob o efeito ou não de forças de atrito para verificar e explorar todas estas vantagens. Nós sugerimos que a consideração do problema geral, em que todas as situações são tratadas ao mesmo tempo para obtenção de uma única equação geral para o problema, seja feita posteriormente. Essa ordem foi escolhida porque verificamos que os alunos se mostram mais entusiasmados ao perceberem que a escolha de determinadas condições na equação geral fornecia casos particulares do problema que eles já conheciam. A percepção de tais condições pode trazer grande alegria e motivação aos estudantes. Todos os cálculos podem ser realizados de forma literal, porém, é aconselhável que o professor forneça valores numéricos para as grandezas para os alunos terem um noção melhor do resultado obtido.

Como primeiro caso particular vamos analisar a resultante centrípeta de um dos brinquedos mais emocionantes de alguns parques de diversão, o rotor. Este consiste de um dispositivo que gira em torno de seu próprio eixo acoplado a um grande cilindro vertical de raio R , veja ilustração na Fig.A.6(a). As pessoas ficam de pé apoiadas na parede interna deste cilindro. Quando colocado em rotação o piso é removido e as pessoas continuam apoiadas na parede sem escorregar, pois a força peso da pessoa (mg) é equilibrada pela força de atrito estático. Assumindo que o cilindro gira com velocidade constante v e a lei de Coulomb para o atrito estático sendo dada por $f_{at} = \mu_e N$, em que μ_e é o coeficiente de atrito estático da superfície que compõe a parede interna do cilindro e N a reação normal da parede na pessoa, os alunos precisam determinar

a velocidade do rotor em função de μ_e , g e R .

Os cálculos podem ser conduzidos de forma usual. Considerando as forças resultantes nos eixos x e y temos,

$$\vec{F}_x = \vec{N} \quad (\text{A.13})$$

$$\vec{F}_y = \vec{f}_{at} + m\vec{g} \quad (\text{A.14})$$

A força resultante em x neste caso é a força centrípeta, de modo que $N = mv^2/R$. Da resultante em y obtemos que $\mu_e N = mg$. Isolando a força normal N em ambas expressões obtemos para a velocidade do rotor,

$$v = \sqrt{\frac{Rg}{\mu_e}}, \quad (\text{A.15})$$

que é o resultado desejado. Este resultado mostra que quanto maior o raio do rotor, ou seja, mais distante a pessoa estiver do eixo de simetria do rotor, maior será sua velocidade.

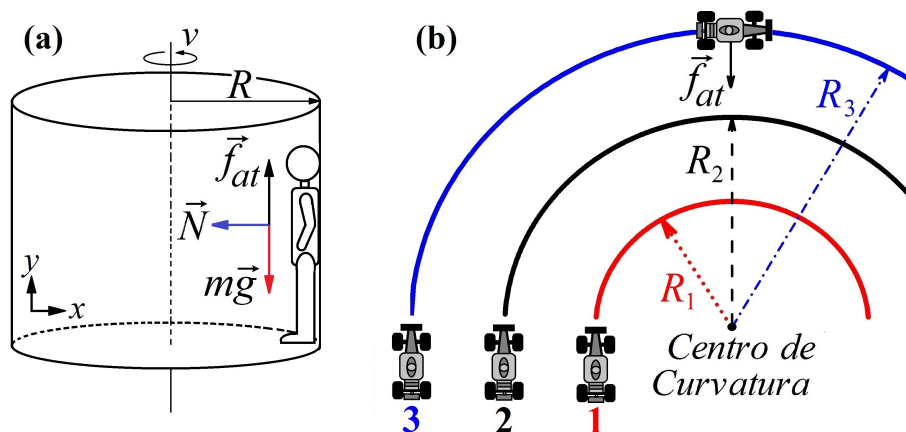


FIGURA A.6: (a) Rotor de raio R girando em torno do seu próprio eixo com velocidade v constante. Uma pessoa apoiada na parede interna do cilindro vertical permanece apoiada mesmo depois que o piso é removido, pois sua força peso é equilibrada pela força de atrito da parede sobre a pessoa. (b) Ilustração de três veículos percorrendo três trajetórias circulares horizontais com raios de curvatura diferentes sob o efeito da força de atrito \vec{f}_{at} .

Fonte: Autor.

O resultado da eq.(A.15) pode ficar ainda mais evidente se o professor utilizar analogias, como mostrar as diferentes velocidades em pontos localizados em diferentes posições sobre o raio de um disco rígido em rotação, ou o condicionamento de guia de 360° realizado com cavalos, em que o domador e o animal

se comunicam através de uma guia para se movimentarem circularmente. Neste, o domador fica próximo do centro de rotação caminhando lentamente enquanto que o cavalo, localizado na outra extremidade da guia a uma distância maior do centro de rotação, precisa se movimentar a uma velocidade bem maior para acompanhar o domador. Estas analogias podem ser muito úteis não só para o entendimento do resultado, mas também para motivar os alunos a observar com um olhar diferenciado fenômenos a volta deles e a possibilidade de descrever os mesmos matematicamente.

Para continuar com a análise de situações particulares vamos considerar o movimento de automóveis em duas situações distintas. Na primeira trataremos a ação da força de atrito no movimento dos veículos em curvas planas e horizontais. Em seguida aumentaremos um pouco a complexidade do sistema ao considerar que as curvas são inclinadas por um ângulo θ sem atrito e com atrito para comparações. Nestes casos, os alunos precisam determinar a velocidade máxima permitida para que a curva seja realizada com segurança em função de parâmetros como, o raio de curvatura R , a aceleração da gravidade g quando for o caso, e o coeficiente de atrito cinético entre os pneus e a pista μ , quando a força de atrito for considerada.

Na Fig.A.6(b) mostramos três veículos percorrendo três trajetórias circulares horizontais com raios de curvatura diferentes sob o efeito da força de atrito \vec{f}_{at} . Quando um automóvel faz uma curva a uma determinada velocidade v , a força de atrito entre os pneus e a pista impede que o mesmo perca o traçado da curva. Porém, para que o automóvel possa realizar a curva com segurança existe uma velocidade limite ou velocidade máxima v_{max} . Esta é a razão de vermos placas de sinalização indicando a velocidade máxima de determinados trechos de uma rodovia. Esta velocidade pode ser obtida através da resultante centrípeta, que neste caso é igual à força de atrito, ou seja, $mv^2/R = \mu N$. Como o movimento do automóvel se dá em uma pista horizontal a reação normal é igual a força peso, $N = mg$. Com essas duas expressões podemos obter o valor de v_{max} que é dado por,

$$v_{max} = \sqrt{Rg\mu}. \quad (\text{A.16})$$

Note que v_{max} depende do raio da curvatura R . Por esta razão que utilizamos uma figura (Fig.A.6b) com três veículos percorrendo três trajetórias circulares com raios diferentes. Os alunos podem notar que em uma curva mais aberta, maior R , o veículo poderá atingir velocidades maiores sem que perca o traçado da curva. Isso é amplamente observado em corridas de fórmula 1 ou de outras modalidades e até mesmo no dia a dia dos alunos. Outra pergunta que pode ser feita é, se os três veículos percorrerem as respectivas curvas à mesma velocidade, qual deles fará a curva com maior segurança? A partir da eq.(A.16) os alunos terão condições de analisar o problema de maneira adequada.

Outro caso particular muito interessante é considerar que a trajetória circular é agora inclinada por um ângulo θ , como na Fig.A.7. É conveniente tratar primeiramente o problema com ausência de qualquer força de atrito para mostrar para os alunos somente o efeito da inclinação da pista no valor da velocidade limite, responsável por manter o automóvel na trajetória horizontal. Neste caso é necessário considerar $f_{at}^{(1)}$ e $f_{at}^{(2)}$ iguais a zero na Fig.A.7. Para resolver o problema é preciso decompor o vetor força normal na direção da força centrípeta e na direção da força peso, de modo que $N \sin(\theta) = mv^2/R$ e $N \cos(\theta) = mg$, respectivamente. Combinando as duas equações para eliminar N obtemos para a velocidade limite,

$$v = \sqrt{Rg \tan(\theta)}. \quad (\text{A.17})$$

Esta equação é muito interessante porque mostra que o valor de v é dado por uma raiz negativa para valores de θ maiores que $\pi/2$, como esperado, pois o carro irá cair e portanto não há velocidade limite para este caso. É sempre interessante o professor fornecer alguns valores numéricos para os parâmetros ao final dos cálculos para fazer com que os alunos tenham uma percepção maior das possibilidades que a equação matemática pode fornecer, para que comparações com a realidade sejam feitas. Como vimos na seção A.2, não é sempre que um resultado puramente matemático representa uma realidade física. É por isso que precisamos da matemática e da física para análise dos fenômenos.

Neste ponto já é possível fazer algumas correlações entre os resultados obtidos até o momento. Se compararmos a eq.(A.17) com a eq.(A.16), obtida para a curva horizontal com atrito, tem-se que $\mu = \tan(\theta)$. Portanto, a inclinação

da pista faz o papel da força de atrito na trajetória horizontal para manter o veículo na curva. Este fenômeno é comumente explorado nos circuitos ovals e velódromos para possibilitar maior velocidade e maior aderência de carros e bicicletas nas pistas. É interessante notar também que se inclinarmos a pista de um ângulo próximo de 90° seria necessário velocidades muito grandes para garantir a aderência necessária para manter o carro na curva. Este resultado pode instigar os alunos ao desafio de conseguir tal feito. Quão grande deveria ser o valor dessa velocidade para um carro popular que tem uma massa em torno de 1300kg? Seria necessário alguma condição especial para o carro ou a pista para que uma corrida em uma pista inclinada de 90° com relação ao solo pudesse ser realizada na realidade? Uma dificuldade imediata que pode ser abstraída do nosso modelo para a engenharia dessa pista é que a força centrípeta deve necessariamente ser constante. Isso implicaria em construir uma pista perfeitamente circular, o que é muito difícil em termos práticos. Note como é possível conduzir o aluno a um mundo cheio de desafios quando um simples problema de física é tratado matematicamente de forma adequada. A aliança entre estas disciplinas nos permite imaginar as possibilidades de se realizar uma corrida na parede. Grandes feitos tecnológicos podem surgir a partir de ideias e análises como esta.

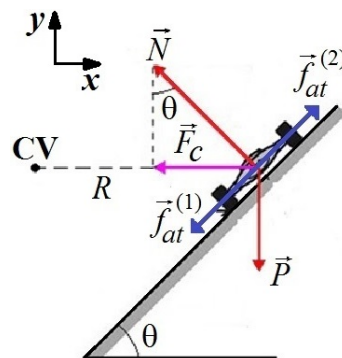


FIGURA A.7: Ilustração de um carro em uma pista inclinada por um ângulo θ e todas as forças relevantes para a obtenção da equação geral para a velocidade limite do veículo, sendo \vec{F}_c a resultante centrípeta, \vec{N} a reação normal da pista no carro, \vec{P} sua força peso, R o raio de curvatura com relação ao centro de curvatura CV e duas situações diferentes consideradas para a força de atrito. Na situação 1 consideramos $f_{at}^{(1)}$ para dentro da curva e na situação 2 consideramos $f_{at}^{(2)}$ para fora da curva.

Fonte: Autor.

A obtenção da equação geral do sistema pode ser feita a partir de duas

situações em que a força de atrito deve ser considerada, para dentro da curva $\vec{f}_{at}^{(1)}$ e para fora da curva $\vec{f}_{at}^{(2)}$, como ilustrado na Fig.A.7. Note que se considerarmos $\theta = 0$ teremos apenas $\vec{f}_{at}^{(1)}$, que é a responsável por manter o carro na curva. No caso da pista inclinada, diversas possibilidades podem ser analisadas para o ângulo de inclinação θ , de $0 \leq \theta \leq \pi/2$, e também ângulos maiores que $\pi/2$. Por esta razão consideramos a força $\vec{f}_{at}^{(2)}$, pois à medida que aumentamos θ o carro poderá deslizar para baixo devido ao seu peso, como no caso de um bloco deslizando para baixo sob o efeito da gravidade em um plano inclinado. Diante dessa possibilidade pode-se abordar ainda a seguinte questão: Será que é possível obter matematicamente o valor de θ para o qual a força $\vec{f}_{at}^{(2)}$ começa a se tornar relevante em comparação com $\vec{f}_{at}^{(1)}$?

Como neste caso mais geral são tratadas diversas forças, os alunos usualmente ficam um pouco reticentes para iniciar os cálculos das velocidades limites para as duas situações. Uma maneira conveniente para fazer com que todos participem pelo menos da análise da equação geral é apresentar a expressão final da velocidade limite para cada situação e pedir para eles chegarem no resultado.

Considerando o mesmo coeficiente de atrito μ , ou seja, $f_{at}^{(1)} = f_{at}^{(2)} = \mu N$, é possível mostrar, utilizando o mesmo procedimento descrito anteriormente para os casos particulares, que:

Situação 1:

$$v_1 = \sqrt{Rg \left[\frac{\sin(\theta) + \mu \cos(\theta)}{\cos(\theta) - \mu \sin(\theta)} \right]}. \quad (\text{A.18})$$

Situação 2:

$$v_2 = \sqrt{Rg \left[\frac{\sin(\theta) - \mu \cos(\theta)}{\cos(\theta) + \mu \sin(\theta)} \right]}. \quad (\text{A.19})$$

Se compararmos as eqs.(A.18) e (A.19) a única diferença é o sinal de μ . Ao apresentar estas expressões é provável que muitos alunos desistirão de obter tais resultados, geralmente pelo tamanho da equação. Muitos desistem antes mesmo de tentar. Como já dissemos, isso não impede que estes alunos também possam fazer a análise destas relações para diferentes condições.

Após a obtenção de v_1 e v_2 pelos alunos, inicie a análise dos resultados para alguns valores particulares do ângulo de inclinação θ . Se for feito o limite das eqs.(A.18) e (A.19) para θ tendendo a zero tem-se:

Situação 1:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} v_1 = \sqrt{Rg \left[\frac{\sin(0) + \mu \cos(0)}{\cos(0) - \mu \sin(0)} \right]} = \sqrt{Rg\mu}. \quad (\text{A.20})$$

Situação 2:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} v_2 = \sqrt{Rg \left[\frac{\sin(0) - \mu \cos(0)}{\cos(0) + \mu \sin(0)} \right]} = \sqrt{-Rg\mu}. \quad (\text{A.21})$$

Na situação 1 foi reproduzido o resultado da pista horizontal dado pela eq.(A.16). Neste caso não faz sentido considerarmos uma força de atrito para fora da curva, pois o que mantém o veículo na curva é a força centrípeta dada pela força de atrito. Por esta razão obtém-se uma raiz quadrada negativa para a situação 2 em que $f_{at}^{(2)} \neq 0$.

Considerando agora os limites de v_1 e v_2 para $\theta \rightarrow \pi/2$ obtemos,

$$v_1 = \sqrt{-\frac{Rg}{\mu}}, \quad (\text{A.22})$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{Rg}{\mu}}. \quad (\text{A.23})$$

Novamente, reproduzimos um resultado conhecido em que v_2 é precisamente a velocidade limite para o rotor dado pela eq.(A.15). A raiz negativa obtida em v_1 também fornece um resultado importante, porque os alunos percebem rapidamente que isso seria equivalente à velocidade limite para o carro não ascender a pista verticalmente, o que acaba sendo um absurdo uma vez que o veículo tende a cair verticalmente sob o efeito da gravidade.

Outra condição pode ser feita com relação à força de atrito. Se fizermos $\mu = 0$ obtemos:

$$v_i = \sqrt{Rg \tan(\theta)}, \quad (\text{A.24})$$

para ambas situações, $i = 1, 2$. Este resultado é o mesmo obtido na eq.(A.17) para a pista inclinada sem atrito.

Nesta etapa o professor pode provocar os alunos ao considerar as condições $\theta = 0$ e $\mu = 0$. O resultado para ambas situações é $v = 0$. Isso pode gerar uma infinidade de discussões. Alguns alunos irão criticar o modelo com afirmações sobre a impossibilidade do veículo realizar uma curva nestas condições, uma vez que o mesmo está parado. Com um pouco de discussão e reflexão os alunos perceberão que se tanto o atrito quanto o ângulo de inclinação forem nulos, a única forma do carro não sair da curva é ficar parado, por isso que o modelo matemático fornece uma velocidade nula nestas condições. Vale ressaltar que está sendo calculada a velocidade limite para o carro se manter no traçado da curva.

O leitor pode estar se perguntando, se o propósito aqui é obter uma equação geral, por que então não tratamos $f_{at}^{(1)}$ e $f_{at}^{(2)}$ na mesma equação, considerando uma única situação em vez de duas como foi feito? Essa separação foi feita para facilitar a visualização dos resultados quando as condições particulares são utilizadas nas situações 1 e 2. Podemos tratar as duas situações em uma só sem maiores problemas.

Considerando $f_{at}^{(i)} = \mu_i N$, para $i = 1, 2$, pode-se demonstrar que a velocidade limite neste caso é dada por,

$$v = \sqrt{Rg \left[\frac{\sin(\theta) + (\mu_1 - \mu_2) \cos(\theta)}{\cos(\theta) - (\mu_1 - \mu_2) \sin(\theta)} \right]}. \quad (\text{A.25})$$

Este resultado é praticamente o mesmo obtido para as situações 1 e 2, eqs.(A.18) e (A.19). Isso fica mais evidente se substituirmos $(\mu_1 - \mu_2)$ por um coeficiente de atrito efetivo μ na situação 1 e $-\mu$ na situação 2. É interessante notar ainda na eq.(A.25) que se tivermos $\mu_1 = \mu_2$ obtemos a velocidade limite para a pista inclinada sem atrito, $\mu = 0$, dada pela eq.(A.17). Ou seja, como as forças de atrito são iguais elas se anulam e o efeito é como se o atrito não existisse.

Note a infinidade de discussões que podem ser conduzidas a partir da obtenção de uma equação geral para um problema de física. Como os alunos já conheciam as situações particulares, a análise da equação geral a partir de determinadas condições pode se tornar um exercício motivador para eles. Todo o raciocínio apresentado nesta seção está resumido na tabela A.1 para as diferentes condições consideradas.

TABELA A.1: Equações específicas reproduzidas a partir de condições particulares para alguns parâmetros do sistema, como o ângulo de inclinação θ e o coeficiente de atrito μ , inseridas nas equações gerais (A.18) e (A.19) para as velocidades limite v_1 e v_2 , respectivamente, de um veículo em movimento numa pista inclinada.

<i>Geral</i>	<i>Condição</i>	<i>Específica</i>	<i>Fenômeno Físico</i>
	$\theta = 0$	$\sqrt{Rg\mu}$	Pista horizontal com atrito eq.(A.16)
$v_1 = \sqrt{Rg \left[\frac{\sin(\theta) + \mu \cos(\theta)}{\cos(\theta) - \mu \sin(\theta)} \right]}$	$\theta = \frac{\pi}{2}$	$\sqrt{-\frac{Rg}{\mu}}$	Não existe v_1
	$\mu = 0$	$\sqrt{Rg \tan(\theta)}$	Pista inclinada sem atrito eq.(A.17)
$v_2 = \sqrt{Rg \left[\frac{\sin(\theta) - \mu \cos(\theta)}{\cos(\theta) + \mu \sin(\theta)} \right]}$	$\theta = 0$	$\sqrt{-Rg\mu}$	Não existe v_2
	$\theta = \frac{\pi}{2}$	$\sqrt{\frac{Rg}{\mu}}$	Rotor eq.(A.15)
	$\mu = 0$	$\sqrt{Rg \tan(\theta)}$	Pista inclinada sem atrito eq.(A.17)

Para responder a pergunta que fizemos anteriormente, sobre o valor do ângulo de inclinação θ da pista em que a força $f_{at}^{(2)}$ começa a se tornar relevante em comparação com $f_{at}^{(1)}$, é instrutivo a utilização dos gráficos de v_1 e v_2 em função do ângulo θ . Com o gráfico é possível analisar todos os ângulos possíveis para a velocidade limite em qualquer intervalo desejado.

Na Fig.A.8 representamos as velocidades v_1 (linha sólida vermelha) e v_2 (linha pontilhada-tracejada azul) em função do ângulo de inclinação da pista θ para $g = 9,81m/s^2$, $R = 10m$ e $\mu = 1$ no intervalo de $0 \leq \theta \leq 3\pi/2$ ou equivalentemente de $0 \leq \theta \leq 135^\circ$. Utilizamos um passo de $\pi/4$ (45°) no eixo θ . Ao observarem o gráfico a maioria dos alunos concordam que para $\theta = \pi/4$, ou 45° , a força de atrito $f_{at}^{(2)}$ começa a se tornar relevante e precisa ser considerada no problema. Neste ângulo é possível observar também, através de v_1 , que se $f_{at}^{(2)}$ não fosse considerada, seria necessário uma velocidade v_1 muito grande para o veículo se manter na pista. Com a utilização do gráfico o professor pode fazer variações da mesma pergunta como, para quais intervalos de θ devemos considerar $f_{at}^{(1)}$ e $f_{at}^{(2)}$?

Uma questão muito interessante que pode ser levantada junto a turma é a possibilidade de existir uma velocidade limite v_2 para ângulos maiores que $\pi/2$, correspondente a área hachurada do gráfico da Fig.A.8. Como no exemplo da contração de Lorentz na relatividade, apresentado na seção A.3, observamos um resultado matematicamente possível mas que não tem possibilidade física nas condições consideradas, pois o carro irá cair verticalmente para $\theta > \pi/2$. Portanto, chamamos a atenção mais uma vez sobre as vantagens de se trabalhar as disciplinas de física e matemática de maneira indissociável.

Na seção A.8 falaremos um pouco mais sobre as vantagens de se utilizar gráficos para auxiliar na análise de um problema.

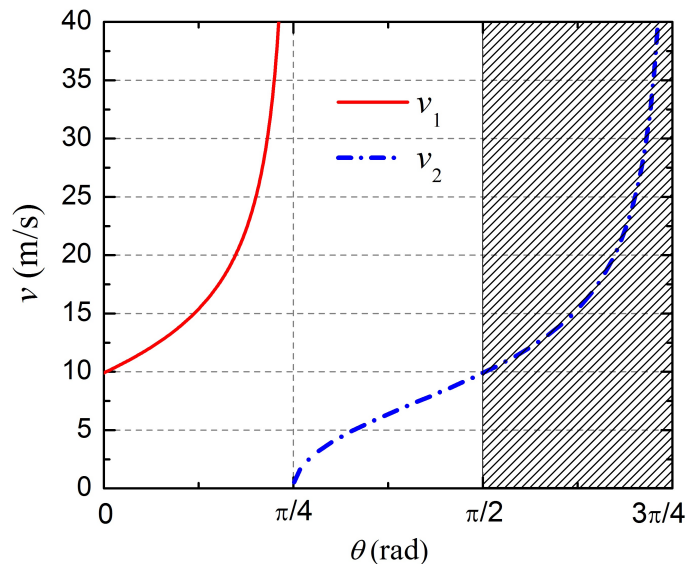


FIGURA A.8: Gráficos das velocidades do carro nas situações 1 (v_1) e 2 (v_2), ilustradas na Fig.A.7, em função do ângulo de inclinação da pista θ . Estes são obtidos das eqs.(A.18) e (A.19) em que foram consideradas as forças de atrito $f_{at}^{(1)}$ e $f_{at}^{(2)}$, respectivamente, utilizando os parâmetros $g = 9,81m/s^2$, $R = 10m$ e $\mu = 1$. A área hachurada é para destacar ângulos maiores que $\pi/2$ para a velocidade limite v_2 .

Fonte: Autor.

A.7 Lei de movimento de um sistema com força variável: Movimento Harmônico Simples

Nas situações descritas na seção anterior foi possível obter as leis de movimento do sistema e situações limite utilizando uma matemática simples e adequada para o ensino médio. E para o caso de sistemas em que a força aplicada não é nem constante e nem nula, seria possível proceder da mesma maneira para obtenção das leis de movimento? Se considerarmos o caso de um oscilador harmônico em uma dimensão, como o sistema massa-mola ilustrado na Fig.A.9, em que temos uma força variável dada pela lei de Hooke $F(x) = -kx$, como podemos convencer os estudantes de que a lei de movimento deste sistema é dada por,

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi), \quad (\text{A.26})$$

em que A é a amplitude do movimento, ω a frequência angular de oscilação e ϕ a fase inicial do movimento? Este movimento é denominado Movimento Harmônico Simples (MHS), significando que a posição x da partícula é uma função senoidal do tempo.

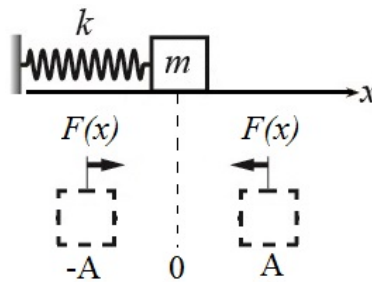


FIGURA A.9: Sistema massa-mola descrito pela lei de Hooke $F(x) = -kx$, mostrando que quando a massa m se desloca de sua posição de equilíbrio estável ($x = 0$), a força restauradora $F(x)$ fornecida pela mola de constante elástica k faz com que a mesma retorne a $x = 0$. É por isso que esta força é chamada de restauradora, pois ela age no sentido de restaurar a posição de equilíbrio estável do sistema. A contante A ou $-A$ descreve a amplitude do movimento.

Fonte: Autor.

De fato não é nada trivial dizer para um estudante que um movimento pode ser descrito por uma função senoidal. Ainda mais se este tipo de função

não for familiar aos alunos. À primeira vista, pode parecer muito complicado obter a eq.(A.26) através de uma matemática acessível para os alunos do ensino médio. A forma mais direta seria utilizar técnicas de cálculo diferencial e integral e números complexos para resolver a equação diferencial $F = -kx$, ou seja, a princípio seria completamente inviável para alunos do ensino médio.

Vamos demonstrar agora como a matemática pode auxiliar o ensino de física mesmo nesta situação. Utilizando conceitos familiares para os alunos do ensino médio, como geometria, movimento retilíneo e circular uniformes e projeção de vetores, mostraremos como obter a posição do oscilador harmônico no tempo, dada pela eq.(A.26), sua velocidade e aceleração.

Para isso, uma das alternativas seria visualizar o movimento do oscilador harmônico como uma projeção de outro tipo de movimento que conhecemos e conseguimos equacionar facilmente. Se considerarmos um objeto em movimento circular uniforme (MCU) em uma trajetória circular de raio R , como ilustrado na Fig.A.10(a), nota-se que a sombra ou a projeção do objeto no eixo x realiza o mesmo movimento que uma massa presa a uma mola. Ou seja, este realiza um movimento de vai e vem periódico com um deslocamento máximo, ou amplitude, dado por R . Antes da obtenção da lei de movimento da projeção da partícula, que executa um MHS, vamos obter a equação de movimento da partícula na trajetória circular.

Vamos considerar que a trajetória circular é dada por s . Se a partícula completar uma volta no círculo, ela terá percorrido a distância do comprimento da circunferência do mesmo, ou seja, $s = 2\pi R$. O fator 2π é o ângulo total, dado por 360° , contido no círculo de raio R . Naturalmente, se a partícula percorrer apenas um arco da trajetória circular teremos $s = \theta R$. Note que para o círculo completo $\theta = 2\pi$. Para obter a equação de movimento deste sistema vamos recorrer ao que nós já sabemos sobre o movimento retilíneo uniforme (MRU). Você poderia perguntar, mas o que estes movimentos têm em comum se um é circular e o outro é retilíneo?

Na verdade estes dois movimentos tem muito em comum e podem ser descritos basicamente pela mesma equação. Vamos ver como isso pode ocorrer.

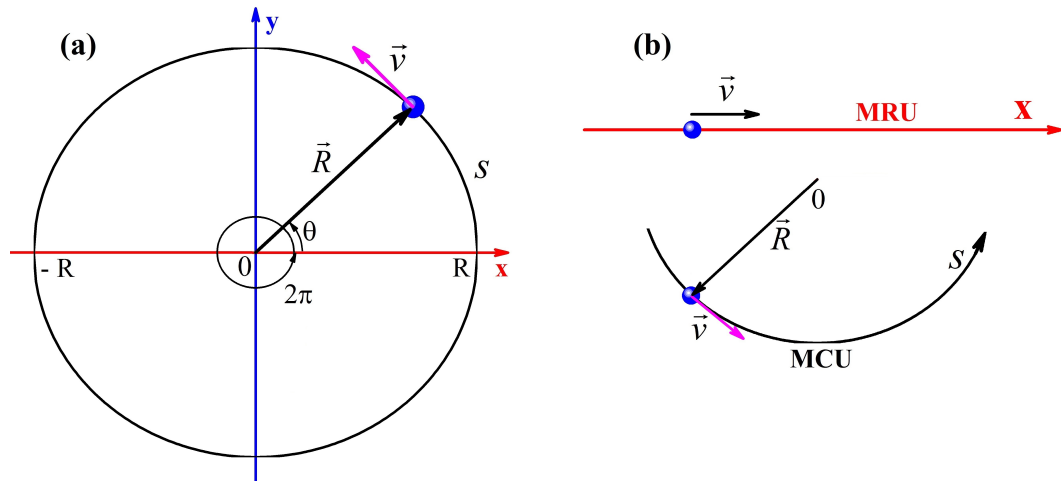


FIGURA A.10: (a) Partícula em movimento circular uniforme com velocidade \vec{v} , mostrando a trajetória circular s de raio R e ângulo θ . (b) Se curvamos a trajetória retilínea dada pelo eixo x no MRU obtemos a trajetória circular s do MCU. Em ambos os casos temos um grau de liberdade.

Fonte: Autor.

Ambos os movimentos são uniformes. Isso significa que a magnitude da velocidade de ambos os sistemas é constante. Observe que falamos sobre a magnitude da velocidade, pois como já discutido, a velocidade é um vetor e no caso circular ela muda sua direção o tempo todo porque existe uma força centrípeta mantendo a partícula em uma trajetória circular. Já no caso retilíneo tanto a magnitude quanto a direção da velocidade são constantes. Mas como podemos aproveitar a equação do movimento retilíneo uniforme para descrever o movimento circular uniforme?

Para isso precisamos recorrer ao que chamamos na física de grau de liberdade. Isto se refere à liberdade de movimento de um sistema físico, ou seja, é a variável de movimento do sistema. No caso do MRU em uma dimensão, vimos que o “mundo” da partícula é uma linha reta dada pelo eixo x . Logo, a partícula só pode se mover para frente e para trás em x . Portanto, este sistema possui um único grau de liberdade que é dado por x . No caso do MCU, quantos graus de liberdade nós temos? A maioria dos alunos respondem 2, porque o movimento se dá em um plano, no nosso caso xy . Este é um exemplo de sistema bidimensional. Geralmente os alunos confundem o número de dimensões com o número de graus de liberdade do sistema. Este exemplo é ótimo para mostrar a diferença entre

os mesmos. Observe que a partícula, apesar de estar se movendo em um plano, ainda está confinada a se mover em uma linha, dada pela trajetória s , pois o raio da trajetória circular não varia. Ou seja, apesar deste ser descrito em duas dimensões, continuamos com um sistema de um grau de liberdade apenas. E que grau de liberdade é esse? Este pode ser descrito tanto por s quanto por θ , pois ambos estão relacionados por $s = \theta R$. É interessante notar que se a trajetória retilínea dada pelo eixo x no MRU for curvada, teremos automaticamente a trajetória s do MCU, como mostra a Fig.A.10(b).

Dessa forma podemos utilizar a equação do MRU dada por $s(t) = s_0 + vt$, obtida da eq.(A.12) quando $F = 0$ e trocando x por s , para obtenção da equação do MCU. Utilizando a relação $s = \theta R$ e como R não varia com o tempo obtemos:

$$\theta(t) = \frac{s(t)}{R} \implies \theta(t) = \frac{s_0}{R} + \frac{v}{R}t. \quad (\text{A.27})$$

Note que a expressão acima nos permite descrever como o ângulo θ varia no tempo. Ainda utilizando a relação entre s e θ , podemos identificar s_0/R como a posição angular inicial θ_0 da partícula na trajetória circular. E a razão v/R o que é? Se fizermos a variação de s no tempo e lembrando que a velocidade linear da partícula é dada por $\Delta s/\Delta t$ e o raio R da trajetória circular é constante tem-se,

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta(R\theta)}{\Delta t} = R \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \implies v = R\omega. \quad (\text{A.28})$$

O parâmetro $\omega = \Delta\theta/\Delta t$ é a velocidade angular da partícula a qual é dada em rad/s , ou seja, ela nos fornece a taxa com que a posição angular θ da partícula varia no tempo. Neste caso ela é constante, porque estamos trabalhando com movimento uniforme. Logo, a equação que descreve o movimento da partícula na trajetória circular é dada por:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t. \quad (\text{A.29})$$

Note a semelhança da eq.(A.29) para o MCU com a equação do MRU. O que nós temos é uma conversão de variáveis dinâmicas lineares para variáveis dinâmicas angulares, ou seja, $s \longrightarrow \theta$ e $v \longrightarrow \omega$. O mesmo procedimento pode ser realizado para obtenção da aceleração angular.

Agora que sabemos a equação que rege o movimento da partícula na trajetória circular, podemos analisar sua projeção para obtermos a equação de

movimento do oscilador harmônico. Projetando a posição da partícula no eixo x , dada pelo vetor \vec{R} , veja Fig.A.11, temos que

$$\vec{x}(t) = |\vec{R}| \cos[\theta(t)] (\hat{i}). \quad (\text{A.30})$$

Note que apareceu uma novidade na expressão acima, dada pelo *versor* \hat{i} . Um versor é um vetor de magnitude unitária que indica a direção e o sentido do vetor que está sendo tratado. No nosso caso, o versor \hat{i} indica a direção e o sentido de \vec{x} . Quando um aluno pergunta para o outro onde fica a cantina da escola por exemplo, o outro aluno apenas aponta o dedo em direção ao local desejado. Este aluno está fornecendo o versor do deslocamento entre eles e a cantina, pois ele está indicando apenas a direção e o sentido que o colega que perguntou precisa seguir, e não a distância. Portanto, o versor \hat{i} está indicando que a projeção do vetor \vec{R} no eixo x , a qual descrevemos por \vec{x} , aponta para o sentido positivo de x , como mostrado na Fig.A.11. Substituindo $\theta(t)$ dado pela eq.(A.29) em (A.30), obtemos:

$$x(t) = R \cos(\omega t + \theta_0), \quad (\text{A.31})$$

em que utilizamos a notação $|\vec{R}| = R$ para o valor absoluto, ou a magnitude, de \vec{R} . Se trocarmos as letras que descrevem a amplitude R do movimento e a fase inicial θ_0 por A e ϕ , respectivamente, obtemos a mesma expressão dada pela eq.(A.26), a qual descreve a equação de movimento do oscilador harmônico. Os alunos ou você mesmo pode estar se perguntando por que trocar as letras? Esta é uma boa oportunidade para introduzir o conceito de variáveis mudas aos alunos. Não importa a letra, o importante é o seu significado físico. Consideramos A e ϕ ao final do procedimento porque esta é a notação comumente utilizada nos livros didáticos.

Vimos então que não foi preciso resolvermos a equação diferencial dada por $F(x) = -kx$ através de números complexos ou qualquer outro método. Utilizamos apenas conceitos matemáticos básicos e acessíveis a qualquer aluno do ensino médio, mostrando que não é necessário nos limitarmos ao tratamento de movimentos simples, como o MRU, neste nível de ensino, com a justificativa da limitação matemática dos alunos para o tratamento de sistemas mais complexos.

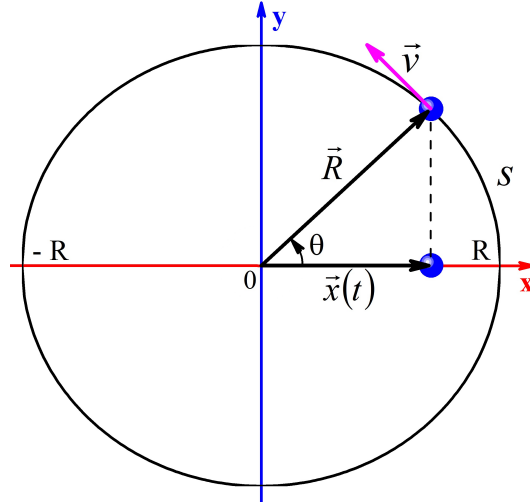


FIGURA A.11: Partícula em movimento circular uniforme com velocidade \vec{v} , mostrando a projeção do vetor \vec{R} no eixo x , dada por $\vec{x}(t) = |\vec{R}| \cos[\theta(t)] (\hat{i})$, para obtenção da equação de movimento do oscilador harmônico.

Fonte: Autor.

Vamos utilizar o mesmo procedimento para obtenção da velocidade $v(t)$ e da aceleração $a(t)$ do oscilador harmônico. Para isso precisamos determinar a projeção de ambos no eixo x , pois estamos analisando o movimento da projeção da partícula neste eixo.

No caso da velocidade é necessário ver como o ângulo θ está disposto com relação ao vetor \vec{v} , pois este não começa na origem do nosso sistema de coordenadas, como o vetor \vec{R} . Pela Fig.A.12(a) podemos tirar a seguinte relação entre os ângulos α , β e θ ,

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\alpha + \theta = 90^\circ.$$

Note que utilizamos o fato do vetor velocidade \vec{v} ser perpendicular ao vetor \vec{R} . Subtraindo as equações acima obtemos $\beta = \theta$. Agora podemos decompor o vetor velocidade nas suas componentes paralelas aos eixos coordenados, ou seja, \vec{v}_x e \vec{v}_y como mostrado na Fig.A.12(b). A componente de interesse para nós é \vec{v}_x , de modo que,

$$\vec{v}_x = |\vec{v}| \sin(\theta) (-\hat{i}) \Rightarrow v_x = -\omega R \sin(\theta), \quad (\text{A.32})$$

onde nós utilizamos a relação $v = \omega R$ obtida em (A.28). Note que neste caso o vetor \vec{v}_x é descrito pelo versor $-\hat{i}$, pois \vec{v}_x aponta na direção negativa do eixo

x . Como nós já obtemos como o ângulo θ varia no tempo, eq.(A.29), podemos concluir de forma direta que,

$$v_x(t) = -\omega R \sin(\omega t + \theta_0), \quad (\text{A.33})$$

Para obtenção da aceleração do oscilador harmônico precisamos considerar a resultante centrípeta na direção radial dada por $F = ma_C$, em que $a_C = v^2/R$ é a aceleração centrípeta da partícula. Esta força é a responsável por manter a partícula em movimento circular uniforme. Ela provoca apenas uma mudança na direção do vetor velocidade.

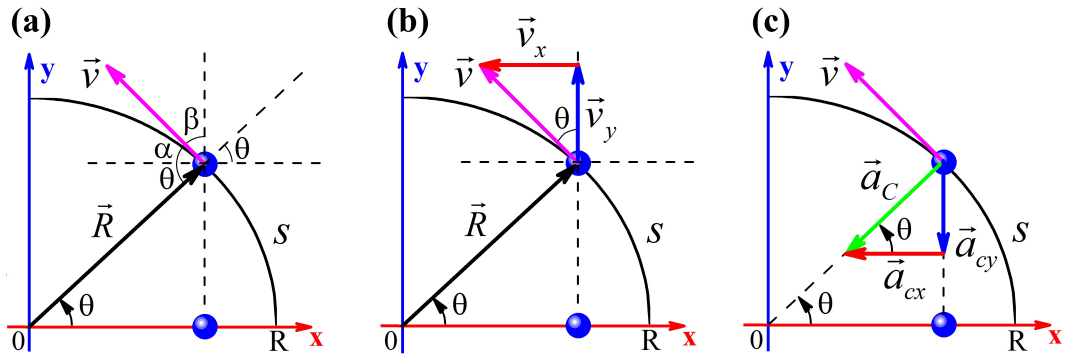


FIGURA A.12: (a) Disposição do ângulo θ em torno do vetor velocidade \vec{v} . (b) Decomposição de \vec{v} em suas componentes \vec{v}_x e \vec{v}_y . (c) Decomposição do vetor aceleração centrípeta \vec{a}_C em suas componentes \vec{a}_{cx} e \vec{a}_{cy} .

Fonte: Autor.

Como o vetor aceleração centrípeta (\vec{a}_C) está na direção do raio da trajetória circular, sua projeção no eixo x pode ser visualizada facilmente, veja Fig.A.12(c), de modo que,

$$\vec{a}_{cx} = |\vec{a}_C| \cos(\theta)(-\hat{i}) \Rightarrow a_{cx} = -\frac{v^2}{R} \cos(\theta). \quad (\text{A.34})$$

Utilizando novamente a relação $v = \omega R$ e a expressão (A.29) para $\theta(t)$ obtemos finalmente,

$$a_{cx}(t) = -\omega^2 R \cos(\omega t + \theta_0). \quad (\text{A.35})$$

Note que, assim como para a componente em x da velocidade, a componente \vec{a}_{cx} da aceleração também aponta na direção negativa do eixo x . Se trocarmos a amplitude R e a fase inicial θ_0 por A e ϕ , respectivamente, e omitirmos

os subíndices da velocidade e da aceleração podemos escrever as equações de movimento do oscilador, o qual executa um movimento harmônico simples, como:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi), \quad (\text{A.36a})$$

$$v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{A.36b})$$

$$a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi). \quad (\text{A.36c})$$

Portanto, fica demonstrado que é possível obter as equações de movimento de sistemas mais complexos, como o do oscilador harmônico o qual está sujeito a uma força variável, utilizando apenas a matemática acessível para os alunos do ensino médio. Na próxima seção mostraremos como o movimento harmônico simples pode ser analisado através dos gráficos das equações (A.36).

A.8 Análise do Movimento Harmônico Simples através de gráficos

A análise de um fenômeno físico através de gráficos de funções que relacionam suas propriedades pode ser muito vantajosa para os estudantes em qualquer nível de ensino. Ao ver como o sistema se comporta quando algum parâmetro interno ou externo do mesmo varia, pode permitir ao aluno fazer previsões ao considerar limites assintóticos ou mesmo em intervalos de interesse e discutir a validade de modelos através de dados experimentais. Novamente, a matemática desempenha o seu papel fundamental para o ensino de física.

A descrição do movimento do oscilador harmônico através de gráficos é essencial para que os estudantes entendam melhor o comportamento de uma função senoidal. Estas funções descrevem muito bem movimentos oscilatórios, pois são funções periódicas definidas em um domínio simétrico que fornece a amplitude, ou o valor máximo, de uma propriedade física.

Você pode estar se perguntando, por que nós estamos insistindo tanto no tema oscilador harmônico? Nós iniciamos este tema para mostrar que é

possível obter as equações de movimento de um sistema com força variável, mesmo com as limitações matemáticas de um aluno do ensino médio. Por que então não fornecer outros exemplos para enriquecer ainda mais o ensino de física neste nível? Na verdade estudar tal sistema é fornecer aos alunos uma infinidade de exemplos de sistemas presentes na natureza e de convívio do dia a dia deles. Apesar da simplicidade da lei de Hooke, em que a força restauradora aplicada no sistema é proporcional ao negativo do seu deslocamento, $F(x) = -kx$, esta pode descrever com boa aproximação um sistema massa-mola real ou um pêndulo executando pequenas oscilações, um oscilador torsional, alguns circuitos elétricos, vibrações sonoras, vibrações moleculares, alguns fenômenos quânticos e incontáveis outros sistemas presentes em diversas áreas do conhecimento. O entendimento de oscilações é requerido para o entendimento de ondas. Ondas harmônicas são produzidas por oscilações harmônicas. Por estas e outras razões que o oscilador harmônico é tão importante na física, justificando assim nossa insistência no tema.

Antes de esboçarmos os gráficos que descrevem o movimento do oscilador harmônico é importante entendermos algumas propriedades do movimento oscilatório. Este é periódico e portanto possui uma frequência, ou número de oscilações que são completadas em cada segundo. O símbolo para a frequência que medimos no laboratório ou quando sintonizamos uma estação de rádio geralmente é dado por f e sua unidade no Sistema Internacional de Unidades (SI) é o hertz, abreviado como Hz. Uma oscilação ou ciclo por segundo equivale a $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$.

O período T do movimento, que é o tempo necessário para completar uma oscilação, está relacionado com a frequência por $T = 1/f$, ou seja, é o inverso da frequência sendo dado em segundos (s). Qualquer movimento que se repita em intervalos regulares é chamado movimento periódico ou movimento harmônico simples (MHS). É interessante notar que a frequência que aparece nas expressões para o deslocamento, a velocidade e a aceleração do oscilador, obtidos na seção anterior, é a frequência angular ω e não f . É possível relacionar o período T e a frequência f com a frequência angular ω ?

Para isso vamos utilizar a eq.(A.36a), que fornece a posição do oscilador

$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$. A função cosseno, assim como o seno, possui período de 2π , ou seja, $\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$. Isso significa que devemos ter $x(t + T) = x(t)$ ao considerarmos o período temporal $t = T$. Assumindo uma fase inicial nula $\phi = 0$, por simplicidade, temos que

$$\begin{aligned} x(t + T) &= x(t), \\ A \cos(\omega t + \omega T) &= A \cos(\omega t) \Rightarrow \omega T = 2\pi, \\ \therefore T &= \frac{2\pi}{\omega}. \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Como $T = 1/f$ podemos obter de forma direta que $f = \omega/2\pi$. Com estes resultados fica bem mais fácil esboçarmos os gráficos que descrevem o MHS.

Se considerarmos múltiplos do período T para o tempo, no nosso caso $T/4$, e substituirmos nas eqs.(A.36) podemos construir tabelas como a tabela A.2. Para isso nós consideramos a fase inicial $\phi = 0$, por simplicidade, e a expressão do período dada por (A.37). A importância de utilizarmos esta expressão está no fato de podermos eliminar ω nos cálculos. Dessa forma não é necessário atribuímos valores numéricos para ω e T . Veja o exemplo para $t = T/4$:

$$\begin{aligned} x\left(t = \frac{T}{4}\right) &= A \cos\left(\omega \frac{T}{4} + 0\right) = A \cos\left(\omega \frac{2\pi}{4\omega}\right) = A \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \\ v\left(t = \frac{T}{4}\right) &= -\omega A \sin\left(\omega \frac{T}{4} + 0\right) = -\omega A \sin\left(\omega \frac{2\pi}{4\omega}\right) = -\omega A \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\omega A, \\ a\left(t = \frac{T}{4}\right) &= -\omega^2 A \cos\left(\omega \frac{T}{4} + 0\right) = -\omega^2 x\left(\frac{T}{4}\right) = 0. \end{aligned}$$

TABELA A.2: Valores da posição $x(t)$, da velocidade $v(t)$ e da aceleração $a(t)$ do oscilador harmônico para $\phi = 0$ e considerando múltiplos de $T/4$ para o tempo t .

t	$x(t)$	$v(t)$	$a(t)$
0	A	0	$-\omega^2 A$
$T/4$	0	$-\omega A$	0
$T/2$	$-A$	0	$\omega^2 A$
$3T/4$	0	ωA	0
T	A	0	$-\omega^2 A$

Na Fig.A.13 nós plotamos os gráficos da posição $x(t)$, da velocidade $v(t)$ e da aceleração $a(t)$ em função do tempo t para dois períodos de oscilação utilizando

as mesmas condições da tabela A.2.

Como o domínio das funções seno e cosseno é o intervalo fechado $[-1, 1]$, as amplitudes destas propriedades ficam caracterizadas pelos parâmetros que multiplicam essas funções, sendo dadas por A , ωA e $\omega^2 A$ para a posição, a velocidade e a aceleração, respectivamente. A partir destes gráficos várias discussões podem ser conduzidas com os alunos com relação ao papel dos parâmetros A , ω e ϕ nas eqs.(A.36). Os gráficos são essenciais para entender o significado físico destes parâmetros, pois é visível o aumento ou diminuição da amplitude A no eixo y , o aumento ou diminuição das oscilações em um período aumentando-se ou diminuindo-se ω e o deslocamento dos gráficos pela atribuição de valores para a fase inicial ϕ .

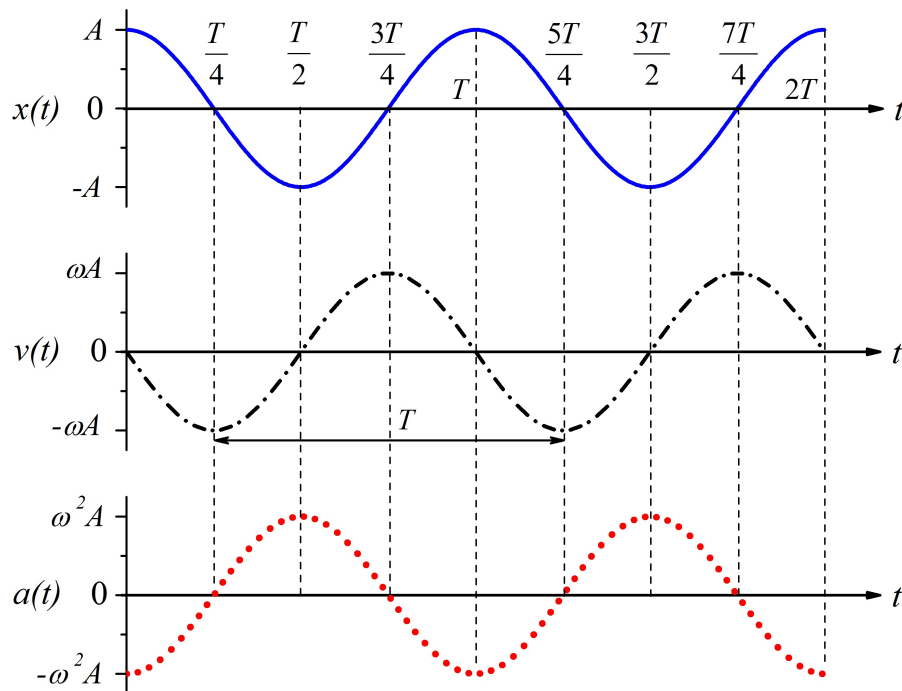


FIGURA A.13: Gráficos da posição $x(t)$, da velocidade $v(t)$ e da aceleração $a(t)$ como funções do tempo t , de uma partícula realizando um movimento harmônico simples para dois períodos de oscilação. No eixo do tempo são exibidos múltiplos de um quarto do período $T = 2\pi/\omega$. Note que as amplitudes ou valores máximos da posição, da velocidade e da aceleração, são dados, respectivamente, por A , ωA e $\omega^2 A$.

Fonte: Autor.

Se considerarmos o sistema composto por uma massa presa a uma mola de constante elástica k os gráficos também podem ser úteis na determinação da frequência de oscilação deste sistema. Formalmente esta frequência é obtida

quando substituimos a eq.(A.36a) na equação diferencial do sistema massa-mola, de modo que,

$$\begin{aligned}
 ma(t) &= -kx(t), \\
 m \frac{d^2x(t)}{dt^2} &= -kx(t) \\
 \frac{d^2 [A \cos(\omega t + \phi)]}{dt^2} &= -\frac{k}{m} A \cos(\omega t + \phi) \\
 -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) &= -\frac{k}{m} A \cos(\omega t + \phi) \\
 \therefore \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{A.38}
 \end{aligned}$$

A maioria dos alunos do ensino médio não conseguiriam obter esta expressão pela substituição de $x(t)$ na equação diferencial do sistema. Mas pelas eqs.(A.36) e pelos gráficos da Fig.A.13 o aluno pode perceber facilmente que $a(t) = -\omega^2 x(t)$. Substituindo esta expressão na segunda lei de Newton obtemos,

$$\begin{aligned}
 ma(t) &= -kx(t), \\
 -\omega^2 x(t) &= -\frac{k}{m} x(t), \\
 \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}}
 \end{aligned}$$

e portanto, o aluno poderá obter a mesma expressão (A.38) sem a necessidade de derivar qualquer equação.

Os gráficos podem ser também muito úteis para o entendimento do fenômeno se o mesmo for esboçado junto com um diagrama do sistema físico. À esquerda da Fig.A.14 é mostrado a projeção da partícula, executando movimento circular uniforme, no eixo horizontal x . Logo abaixo do círculo projetamos as mesmas posições da partícula evoluindo no tempo para um período de oscilação. O tempo é representado por um eixo vertical apontando para baixo. Note que a forma senoidal do movimento pode ser literalmente desenhada pelo próprio sistema à medida que o mesmo evolui no tempo. Se para você isso é óbvio é porque você entende o resultado matemático dado por $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$. Infelizmente, para a maioria dos alunos não é, porque estes não conseguem relacionar a matemática obtida para a descrição do sistema físico com o fenômeno em estudo. Se eles conseguirem estabelecer essa ponte, fica evidente que o

movimento da projeção da partícula é limitado pelo raio da circunferência, por exemplo, ou seja, que a amplitude do movimento em x é dada por R .

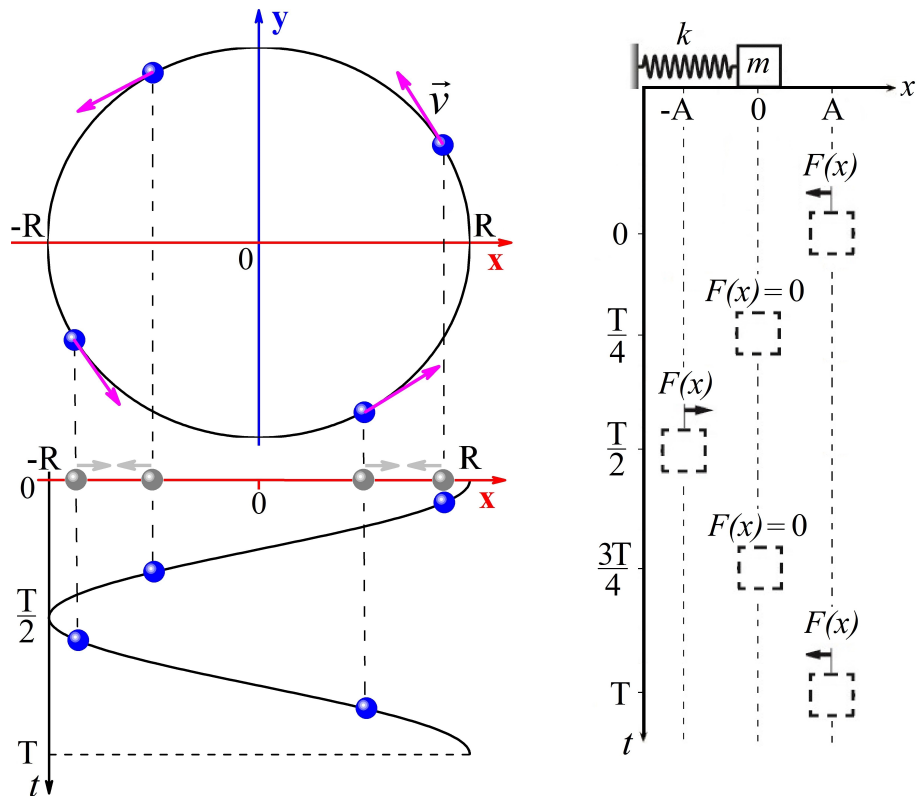


FIGURA A.14: À esquerda mostramos uma partícula em movimento circular uniforme com velocidade \vec{v} e sua projeção (cinza) no eixo x . Note que a partícula se desloca em x entre $-R$ e R , ou seja, a amplitude do movimento é dada por R . Abaixo é mostrado a evolução no tempo desta projeção, $x(t)$ vs. t . À direita observa-se que o movimento da projeção da partícula no eixo x , mostrado à esquerda, é o mesmo de uma massa presa a uma mola se movendo entre $-A$ e A . Em ambos os casos o eixo do tempo t foi colocado na vertical apontando para baixo, com o sistema evoluindo em um tempo total de um período T , ou seja, de $t_0 = 0$ à $t = T$.

Fonte: Autor.

Nós utilizamos a projeção no eixo x do movimento circular da partícula para tornar a obtenção das equações do MHS mais viável, em termos matemáticos, para o aluno do ensino médio. À direita da Fig.A.14 mostramos que um sistema massa-mola executa exatamente o mesmo movimento da projeção da partícula em x , bastando mudar o parâmetro que descreve a amplitude do movimento de R para A . Neste, fica evidente a ação da força restauradora $F(x) = -kx$ que age na massa m no sentido de restaurar a posição de equilíbrio estável $x = 0$. Como nós estamos tratando apenas as oscilações livres do sistema, a consequência disso é que a massa fica oscilando em torno de $x = 0$ com frequência angular ω

constante.

A análise que fizemos para as oscilações livres do MHS pode ser estendida para sistemas mais reais em que é possível considerar o sistema amortecido, forçado ou ambos. Nestes casos o equacionamento torna-se um pouco mais complicado, mas é possível introduzir as equações de movimento aos alunos para discutir os movimentos graficamente e comparar com fenômenos observados no dia a dia deles.

Para o oscilador amortecido, por exemplo, acrescentamos o termo de amortecimento dado por $-\rho v$ na lei de Hooke, ou seja, $F = -kx - \rho v$. Neste caso o professor deve conduzir uma discussão sobre tudo que aparece de novo com relação à descrição do movimento para oscilações livres. A posição do oscilador amortecido com relação ao tempo é dada por,

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \phi). \quad (\text{A.39})$$

Note que agora a amplitude do movimento depende do tempo, sendo dada por $Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}$, e diminui exponencialmente. Esta seria uma oportunidade para discutir o papel da função exponencial em modelos matemáticos que descrevem diversos outros sistemas. A frequência ω neste caso será diferente da frequência das oscilações livres, mas de que forma? Poderíamos introduzir também as oscilações forçadas ou forçadas-amortecidas e discutir o fenômeno de ressonância em ambos os casos. Poderíamos estender o assunto ainda mais descrevendo a energia do oscilador e sua conservação nestas diferentes situações, entre muitas outras possibilidades. Ou seja, com um único sistema físico é possível cobrir muitos tópicos sobre mecânica clássica.

Acreditamos que o aprendizado no ensino médio está alicerçado no desenvolvimento de técnicas e habilidades do aluno e não na quantidade de conteúdo transmitida. As vezes não há tempo viável para transmitir todo o conteúdo necessário para prestar o vestibular ou o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que é o foco principal deste nível de ensino na maioria das escolas. Porém, se o aluno aprender a analisar criticamente um problema e saber utilizar as técnicas necessárias com o auxílio da matemática com apenas alguns tópicos sobre o assunto, já terá valido à pena.